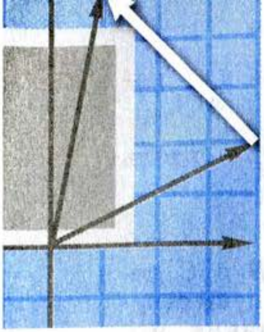


Глава X

Метод координат

С понятием декартовой прямоугольной системы координат вы знакомы по курсу алгебры. Введение системы координат позволяет описывать геометрические фигуры, в частности окружности и прямые, с помощью уравнений, что даёт возможность применять в геометрии алгебраические методы. Так, например, написав уравнения двух данных окружностей, можно с их помощью исследовать взаимное расположение этих окружностей. Наряду с координатами точек будут введены координаты векторов и тем самым будет расширен координатно-векторный аппарат геометрии.

§1 Координаты вектора

89 Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Докажем сначала лемму[1] о коллинеарных векторах.

Лемма

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доказательство

Возможны два случая: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Возьмём число $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k \geqslant 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены (рис. 273, *а*). Кроме того, их длины равны: $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$. Поэтому $\vec{b} = k\vec{a}$.

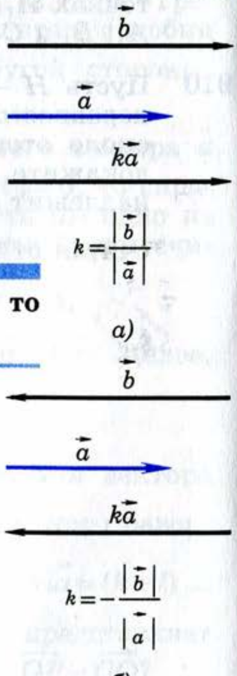


Рис. 273

[1] **Леммой** называется вспомогательная теорема, с помощью которой доказывается следующая теорема или несколько теорем.

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Возьмём число $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k < 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{b}$ снова сонаправлены (рис. 273, *б*). Их длины также равны: $|k\vec{a}| = |k||\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$. Поэтому $\vec{b} = k\vec{a}$. **Лемма доказана.**

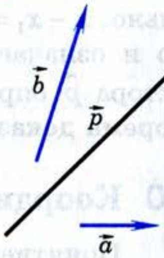
Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y — некоторые числа, то говорят, что **вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.** Числа x и y называются **коэффициентами разложения.** Докажем теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

Теорема

На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные неколлинеарные векторы. Докажем сначала, что любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возможны два случая.



1) Вектор $\vec{p}$ коллинеарен одному из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, например вектору $\vec{b}$. В этом случае по лемме о коллинеарных векторах вектор $\vec{p}$ можно представить в виде $\vec{p} = y\vec{b}$, где y — некоторое число, и, следовательно, $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, т. е. вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) Вектор $\vec{p}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$. Отметим какую-нибудь точку O и отложим от неё векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ (рис. 274). Через точку P проведём прямую, параллельную прямой OB, и обозначим через A_1

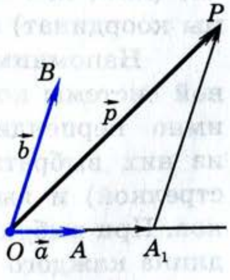


Рис. 274

точку пересечения этой прямой с прямой OA. По правилу треугольника $\vec{p} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P}$. Но векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1P}$ коллинеарны соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому существуют такие числа x и y, что $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1P} = x\vec{b}$. Следовательно, $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е. вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Докажем теперь, что коэффициенты x и y разложения определяются единственным образом. Допустим, что наряду с разложением $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ имеет место другое разложение $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$. Вычитая второе равенство из первого и используя правила действий над векторами, получаем $\vec{0} = (x - x_1)\,\vec{a} + (y - y_1)\,\vec{b}$. Это равенство может выполняться только в том случае, когда коэффициенты $x - x_1$ и $y - y_1$ равны нулю. В самом деле, если предположить, например, что $x - x_1 \neq 0$, то из полученного равенства найдём $\vec{a} = \frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$, а значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, $x - x_1 = 0$ и $y - y_1 = 0$, откуда $x = x_1$ и $y = y_1$. Это и означает, что коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ определяются единственным образом. **Теорема доказана.**

90 Координаты вектора

Понятие **прямоугольной системы координат** (или, как иногда говорят, декартовой системы координат) нам известно из курса алгебры.

Напомним, что для задания прямоугольной системы координат нужно провести две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрать направление (оно обозначается стрелкой) и выбрать единицу измерения отрезков. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

В дальнейшем под длиной отрезка мы будем понимать это число.

Отложим от начала координат O единичные векторы (т. е. векторы, длины которых равны единице) $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, чтобы направление вектора $\vec{i}$ совпало с направлением оси Ox, а направление вектора $\vec{j}$ — с направлением оси Oy (рис. 275). Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ назовём **координатными векторами.**

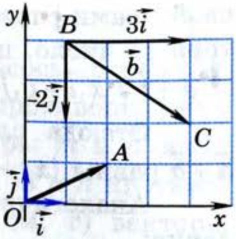


Рис. 275

Координатные векторы не коллинеарны, поэтому любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$, причём коэффициенты разложения (числа x и y) определяются единственным образом. Коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ по координатным векторам называются **координатами вектора** $\vec{p}$ в данной системе координат. Координаты вектора будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{p}\,\{x;\,y\}$. На рисунке 275 $\overrightarrow{OA}\,\{2;\,1\}$ и $\vec{b}\,\{3;\,-2\}$.

Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$, то его координаты равны нулю: $\vec{0}\,\{0;\,0\}$. Если векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ равны, то $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Таким образом, **координаты равных векторов соответственно равны.**

Рассмотрим правила, позволяющие по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число.

1°. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Докажем это утверждение для двух векторов. Рассмотрим векторы $\vec{a}\,\{x_1;\,y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\,y_2\}$. Так как $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, то, пользуясь свойствами сложения векторов и умножения вектора на число, получим:

$$\vec{a}+\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}=(x_1+x_2)\,\vec{i}+(y_1+y_2)\,\vec{j}.$$

Отсюда следует, что координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$.

Аналогично доказывается следующее утверждение:

2^0. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

Иными словами, если $\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$. Проведите доказательство самостоятельно.

3^0. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

В самом деле, пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x;\ y\}$. Найдём координаты вектора $k\vec{a}$, где k — произвольное число. Так как $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$, то $k\vec{a}=kx\vec{i}+ky\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты вектора $k\vec{a}$ равны $\{kx;\ ky\}$.

Рассмотренные правила позволяют определить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов с известными координатами. Пусть, например, требуется найти координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$, если известно, что $\vec{a}\,\{1;\ -2\}$, $\vec{b}\,\{0;\ 3\}$, $\vec{c}\,\{-2;\ 3\}$.

По правилу 3^0 вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2;\ -4\}$, а вектор $-\frac{1}{3}\vec{b}$ координаты $\{0;\ -1\}$. Так как $\vec{p}=(2\vec{a})+(-\frac{1}{3}\vec{b})+\vec{c}$, то координаты вектора $\vec{p}$ можно найти по правилу 1^0: $\{2+0-2;\ -4-1+3\}$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0;\ -2\}$.

Задачи

911 Найдите такое число k, чтобы выполнялось равенство $\vec{n} = k\vec{m}$, если известно, что: а) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены и $|\vec{m}| = 0{,}5$ см, $|\vec{n}| = 2$ см; б) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены и $|\vec{m}| = 12$ см, $|\vec{n}| = 24$ дм; в) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены и $|\vec{m}| = 400$ мм, $|\vec{n}| = 4$ дм; г) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены и $|\vec{m}| = \sqrt{2}$ см, $|\vec{n}| = \sqrt{50}$ см.

912 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, M — середина отрезка AO. Найдите, если это возможно, такое число k, чтобы выполнялось равенство: а) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{CA}$; ж) $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AM}$; з) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CM}$; и) $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{BD}$.

913 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{a}$; б) $\vec{b} - 2\vec{a}$ и $\vec{a}$? Ответ обоснуйте.

914 Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то: а) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ не коллинеарны; в) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + 3\vec{b}$ не коллинеарны.

915 Точка M лежит на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, причём $AM : MC = 4 : 1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

916 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите числа x и y, удовлетворяющие равенству: а) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$; б) $4\vec{a} - x\vec{a} + 5\vec{b} + y\vec{b} = 0$; в) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = 0$; г) $\vec{a} + \vec{b} - 3y\vec{a} + x\vec{b} = \vec{0}$.

917 Начертите прямоугольную систему координат Oxy и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте векторы с началом в точке O, заданные координатами $\vec{a}\{3; 0\}$, $\vec{b}\{2; -1\}$, $\vec{c}\{0; -3\}$, $\vec{d}\{1; 1\}$, $\vec{e}\{2; \sqrt{2}\}$.

918 Разложите векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$, изображённые на рисунке 276, *а*, *б*, *в*, по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и найдите их координаты.

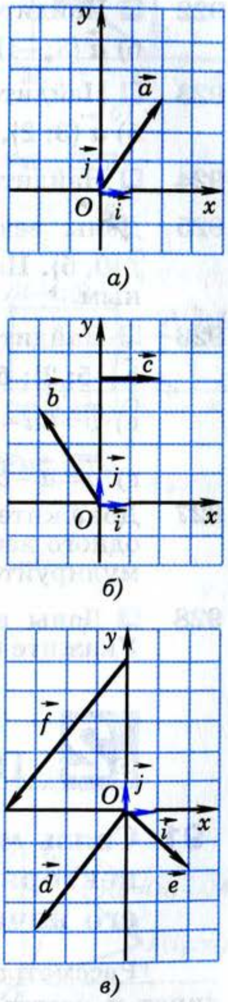


Рис. 276

919 Выпишите координаты векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = 8\vec{i}$, $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{e} = -2\vec{j}$, $\vec{f} = -\vec{i}$.

920 Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора: а) $\vec{x}\{-3; \frac{1}{5}\}$; б) $\vec{y}\{-2; -3\}$; в) $\vec{z}\{-1; 0\}$; г) $\vec{u}\{0; 3\}$; д) $\vec{v}\{0; 1\}$.

921 Найдите числа x и y, удовлетворяющие условию: а) $x\vec{i} + y\vec{j} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$; б) $-3\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + 7\vec{j}$; в) $x\vec{i} + y\vec{j} = -4\vec{i}$; г) $x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{0}$.

922 Найдите координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$, если: а) $\vec{a}\{3; 2\}$, $\vec{b}\{2; 5\}$; б) $\vec{a}\{3; -4\}$, $\vec{b}\{1; 5\}$; в) $\vec{a}\{-4; -2\}$, $\vec{b}\{5; 3\}$; г) $\vec{a}\{2; 7\}$, $\vec{b}\{-3; -7\}$.

923 Найдите координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$, если: а) $\vec{a}\{5; 3\}$, $\vec{b}\{2; 1\}$; б) $\vec{a}\{3; 2\}$, $\vec{b}\{-3; 2\}$; в) $\vec{a}\{3; 6\}$, $\vec{b}\{4; -3\}$; г) $\vec{a}\{-5; -6\}$, $\vec{b}\{2; -4\}$.

924 Найдите координаты векторов $2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$, если $\vec{a}\{3; 2\}$.

925 Даны векторы $\vec{a}\{2; 4\}$, $\vec{b}\{-2; 0\}$, $\vec{c}\{0; 0\}$, $\vec{d}\{-2; -3\}$, $\vec{e}(2; -3\}$, $\vec{f}\{0, 5\}$. Найдите координаты векторов, противоположных данным.

926 Найдите координаты вектора $\vec{v}$, если: а) $\vec{v} = 3\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a}\{2; -5\}$, $\vec{b}\{-5; 2\}$; б) $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$, $\vec{a}\{4; 1\}$, $\vec{b}\{1; 2\}$, $\vec{c}(2; 7)$;

в) $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{a}\{-7; -1\}$, $\vec{b}\{-1; 7\}$, $\vec{c}\{4; -6\}$;

г) $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a}\{7; -2\}$, $\vec{b}\{2; 5\}$, $\vec{c}\{-3; 3\}$.

927 Докажите, что если два вектора коллинеарны, то координаты одного вектора пропорциональны координатам другого. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

928 Даны векторы $\vec{a}\{3; 7\}$, $\vec{b}\{-2; 1\}$, $\vec{c}(6; 14\}$, $\vec{d}\{2; -1\}$, $\vec{e}\{2; 4\}$. Укажите среди этих векторов попарно коллинеарные векторы.

§2 Простейшие задачи в координатах

91 Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

Рассмотрим прямоугольную систему координат и какую-нибудь точку M с координатами $(x; y)$. Напомним, как определяются числа x и y.

Проведём через точку M прямые, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через M_1 и M_2 точки пересечения этих прямых с осями Ox и Oy (рис. 277). Число x (абсцисса точки M) определяется так: $x = OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси (рис. 277, *а*), $x = -OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси (рис. 277, *б*); $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O.

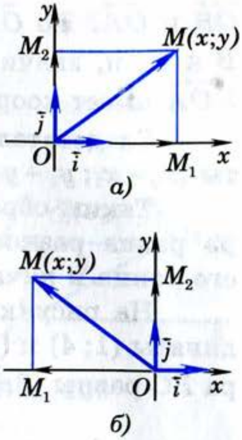


Рис. 277

Аналогично определяется число y (ордината точки M). На рисунке 278 изображена прямоугольная система координат Oxy и отмечены точки $A\,(3;\,2)$, $B\,(-4;\,3)$, $C\,(-2{,}5;\,0)$.

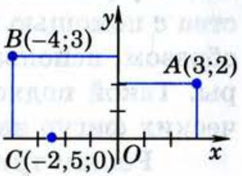


Рис. 278

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовём **радиус-вектором** точки M. Докажем, что **координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора**. Воспользуемся равенством $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (см. рис. 277) и докажем, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ и $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$. Если $x > 0$ (как на рисунке 277, *а*), то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Если $x < 0$ (как на рисунке 277, *б*), то $x = -OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Наконец, если $x = 0$, то $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$ и равенство $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ в этом случае также справедливо. Таким образом, в любом случае $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$.

Следовательно, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ равны $\{x;\,y\}$, т. е. равны соответствующим координатам точки M, что и требовалось доказать.

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала A и конца B. Пусть точка A имеет координаты $(x_1;\,y_1)$, а точка B — координаты $(x_2;\,y_2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ (рис. 279), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов

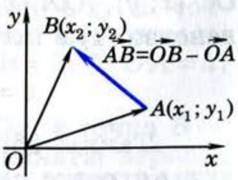


Рис. 279

$\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$. Но $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ — радиус-векторы точек B и A, и, значит, $\overrightarrow{OB}$ имеет координаты $\{x_2; y_2\}$, а $\overrightarrow{OA}$ имеет координаты $\{x_1; y_1\}$.

Следовательно, вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Таким образом, **каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.**

На рисунке 275 точки B и C имеют координаты (1; 4) и (4; 2), поэтому координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ равны $\{3; -2\}$.

92 Простейшие задачи в координатах

Введение системы координат даёт возможность изучать геометрические фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств и, таким образом, использовать в геометрии методы алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур называется **методом координат.**

Решим три вспомогательные задачи а) — в).

а) **Координаты середины отрезка.** Пусть в системе координат Oxy точка A имеет координаты $(x_1; y_1)$, а точка B — координаты $(x_2; y_2)$. Выразим координаты $(x; y)$ середины C отрезка AB через координаты его концов.

Так как точка C — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (1)$$

(Это равенство было доказано в п. 87.)

Координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны соответствующим координатам точек C, A и B: $\overrightarrow{OC}\,\{x; y\}$, $\overrightarrow{OA}\,\{x_1; y_1\}$, $\overrightarrow{OB}\,\{x_2; y_2\}$. Записывая равенство (1) в координатах, получим:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Таким образом, **каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.**

б) Вычисление длины вектора по его координатам. Докажем, что длина вектора $\vec{a}\{x; y\}$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и проведём через точку A перпендикуляры AA_1 и AA_2 к осям Ox и Oy (рис. 280). Координаты точки A равны координатам вектора $\overrightarrow{OA}$, т. е. $(x; y)$. Поэтому $OA_1 = |x|$, $AA_1 = OA_2 = |y|$ (мы рассматриваем случаи, когда $x \neq 0$ и $y \neq 0$; другие случаи рассмотрите самостоятельно). По теореме Пифагора

$$OA = \sqrt{OA_1^2 + AA_1^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

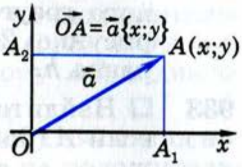


Рис. 280

Но $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = OA$, поэтому $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, что и требовалось доказать.

в) Расстояние между двумя точками. Пусть точка M_1 имеет координаты $(x_1; y_1)$, а точка M_2 — координаты $(x_2; y_2)$. Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$. Следовательно, длина этого вектора может быть найдена по формуле

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Но $|\overrightarrow{M_1M_2}| = d$. Таким образом, расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Задачи

929 ☐ Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на положительной полуоси Oy. Найдите координаты вершин треугольника ABO, если: а) $OA = 5$, $OB = 3$; б) $OA = a$, $OB = b$.

930 ☐ Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на положительной полуоси Oy. Найдите координаты вершин прямоугольника $OACB$, если: а) $OA = 6{,}5$, $OB = 3$; б) $OA = a$, $OB = b$.

931 Начертите квадрат $MNPQ$ так, чтобы вершина P имела координаты $(-3; 3)$, а диагонали квадрата пересекались в начале координат. Найдите координаты точек M, N и Q.

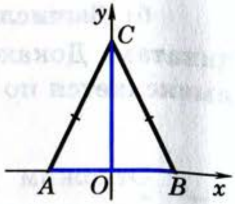


Рис. 281

932 Найдите координаты вершин равнобедренного треугольника ABC, изображённого на рисунке 281, если $AB = 2a$, а высота CO равна h.

933 Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A\,(0; 0)$, $B\,(5; 0)$, $C\,(12; -3.)$.

934 Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, зная координаты его начала и конца: а) $A\,(2; 7)$, $B\,(-2; 7)$; б) $A\,(-5; 1)$, $B\,(-5; 27)$; в) $A\,(-3; 0)$, $B\,(0; 4)$; г) $A\,(0; 3)$, $B\,(-4; 0)$.

935 Перечертите таблицу в тетрадь, заполните пустые клетки и найдите x и y:

A	$(0; 0)$	$(x; -3)$		$(a; b)$	$(1; 2)$
B	$(1; 1)$	$(2; -7)$	$(3; 1)$		
$\overrightarrow{AB}$		$\{5; y\}$	$\{-3; -\frac{1}{2}\}$	$\{c; d\}$	$\{0; 0\}$

936 Перечертите таблицу в тетрадь и, используя формулы для вычисления координат середины M отрезка AB, заполните пустые клетки:

A	$(2; -3)$		$(0; 1)$	$(0; 0)$	$(c; d)$	$(3; 5)$	$(3t+5; 7)$	$(1; 3)$
B	$(-3; 1)$	$(4; 7)$		$(-3; 7)$		$(3; 8)$	$(t+7; -7)$	
M		$(-3; -2)$	$(3; -5)$		$(a; b)$			$(0; 0)$

937 Даны точки $A\,(0; 1)$ и $B\,(5; -3)$. Найдите координаты точек C и D, если известно, что точка B — середина отрезка AC, а точка D — середина отрезка BC.

938 Найдите длины векторов: а) $\vec{a}\,\{5; 9\}$; б) $\vec{b}\,\{-3; 4\}$; в) $\vec{c}\,\{-10; -10\}$; г) $\vec{d}\,\{10; 17\}$; д) $\vec{e}\,\{11; -11\}$; е) $\vec{f}\,\{10; 0\}$.

939 Найдите расстояние от точки $M\,(3; -2)$: а) до оси абсцисс; б) до оси ординат; в) до начала координат.

940 Найдите расстояние между точками A и B, если: а) $A\,(2; 7)$, $B\,(-2; 7)$; б) $A\,(-5; 1)$, $B\,(-5; -7)$; в) $A\,(-3; 0)$, $B\,(0; 4)$; г) $A\,(0; 3)$, $B\,(-4; 0)$.

941 Найдите периметр треугольника MNP, если $M\,(4; 0)$, $N\,(12; -2)$, $P\,(5; -9)$.

942 Найдите медиану AM треугольника ABC, вершины которого имеют координаты: $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; 2)$.

943 Точки B и C лежат соответственно на положительных полуосях Ox и Oy, а точка A лежит на отрицательной полуоси Ox, причём $OA = a$, $OB = b$, $OC = h$. Найдите стороны AC и BC треугольника ABC.

944 Вершина A параллелограмма $OACB$ лежит на положительной полуоси Ox, вершина B имеет координаты $(b; c)$, а $OA = a$. Найдите: а) координаты вершины C; б) сторону AC и диагональ CO.

945 Найдите сторону AC и диагональ OC трапеции $OBCA$ с основаниями $OA = a$ и $BC = d$, если точка A лежит на положительной полуоси Ox, а вершина B имеет координаты $(b; c)$.

946 Найдите x, если: а) расстояние между точками $A(2; 3)$ и $B(x; 1)$ равно 2; б) расстояние между точками $M_1(-1; x)$ и $M_2(2x; 3)$ равно 7.

947 Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и найдите его площадь, если вершины треугольника имеют координаты: а) $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; 2)$; б) $A(-4; 1)$, $B(-2; 4)$, $C(0; 1)$.

948 На оси ординат найдите точку, равноудалённую от точек: а) $A(-3; 5)$ и $B(6; 4)$; б) $C(4; -3)$ и $D(8; 1)$.

949 На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек: а) $A(1; 2)$ и $B(-3; 4)$; б) $C(1; 1)$ и $D(3; 5)$.

950 Докажите, что четырёхугольник $MNPQ$ является параллелограммом, и найдите его диагонали, если:
а) $M(1; 1)$, $N(6; 1)$, $P(7; 4)$, $Q(2; 4)$;
б) $M(-5; 1)$, $N(-4; 4)$, $P(-1; 5)$, $Q(-2; 2)$.

951 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является прямоугольником, и найдите его площадь, если:
а) $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$;
б) $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$, $D(0; 0)$.

Применение метода координат к решению задач

Формулы координат середины отрезка и расстояния между двумя точками можно использовать для решения более сложных геометрических задач. С этой целью следует ввести прямоугольную систему координат и записать условие задачи в координатах. После этого решение задачи проводится с помощью алгебраических вычислений.

952 Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от всех его вершин.

Решение

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Обозначим буквой M середину гипотенузы AB.

Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 282. Если $BC = a$, $AC = b$, то вершины треугольника имеют координаты $C\,(0;\,0)$, $B\,(a;\,0)$, $A\,(0;\,b)$. По формулам координат середины отрезка находим координаты точки M:

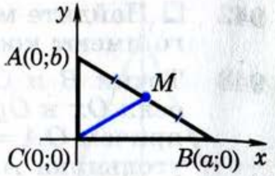


Рис. 282

$$M\left(\frac{a}{2};\,\frac{b}{2}\right).$$

Пользуясь формулой расстояния между двумя точками, найдём длины отрезков MC и MA:

$$MC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$MA = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, $MA = MB = MC$, что и требовалось доказать.

953 Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

Решение

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 283. Если $AD = BC = a$, а точка B имеет координаты $(b;\,c)$, то точка D имеет координаты $(a;\,0)$, а точка C — координаты $(a + b;\,c)$. Используя формулу расстояния между двумя точками, находим:

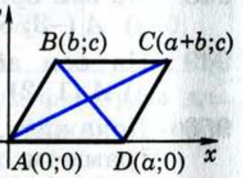


Рис. 283

$$AB^2 = b^2 + c^2,\ AD^2 = a^2,\ AC^2 = (a + b)^2 + c^2,\ BD^2 = (a - b)^2 + c^2.$$

Отсюда получаем:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\,(AB^2 + AD^2) = 2\,(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$AC^2 + BD^2 = (a + b)^2 + c^2 + (a - b)^2 + c^2 = 2\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

Таким образом,

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2,$$

что и требовалось доказать.

954 Медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы этого треугольника.

955 Высота треугольника, равная 10 см, делит основание на два отрезка, равные 10 см и 4 см. Найдите медиану, проведённую к меньшей из двух других сторон.

956 Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

957 Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то параллелограмм является прямоугольником.

958 Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для произвольной точки M плоскости справедливо равенство

$$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2.$$

§3 Уравнения окружности и прямой

93 Уравнение линии на плоскости

При изучении алгебры мы строили графики некоторых функций в прямоугольной системе координат, например график функции $y = x$. Известно, что графиком этой функции является прямая, проходящая через точки $O\,(0; 0)$ и $A\,(1; 1)$ (рис. 284). Координаты любой точки $M\,(x; y)$, лежащей на прямой OA, удовлетворяют уравнению $y = x$ (так как $MM_1 = MM_2$), а координаты любой точки, не лежащей на прямой OA, этому уравнению не удовлетворяют. Говорят, что уравнение $y = x$ является уравнением прямой OA. Введём теперь понятие уравнения произвольной линии.

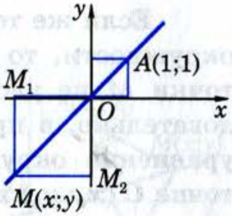


Рис. 284

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy и дана некоторая линия L (рис. 285). Уравнение с двумя переменными x и y называется уравнением линии L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

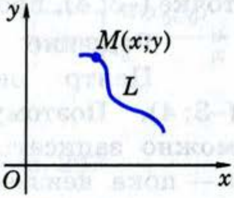


Рис. 285

При изучении линий методом координат возникают две задачи: 1) по геометрическим свойствам данной линии найти её уравнение; 2) обратная задача: по заданному уравнению линии исследовать её геометрические свойства. В следующем пункте мы рассмотрим первую из этих задач применительно к окружности. Вторая задача рассматривалась в курсе алгебры при построении графиков функций.

94 Уравнение окружности

Выведем уравнение окружности радиуса r с центром C в заданной прямоугольной системе координат. Пусть точка C имеет координаты $(x_0; y_0)$ (рис. 286). Расстояние от произвольной точки $M\ (x; y)$ до точки C вычисляется по формуле $MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Если точка M лежит на данной окружности, то $MC = r$, $MC^2 = r^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \qquad (1)$$

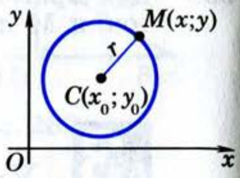


Рис. 286

Если же точка $M\ (x; y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2 \neq r^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, **в прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C\ (x_0; y_0)$ имеет вид:**

$$\boldsymbol{(x - x_1)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.}$$

В частности, уравнение окружности радиуса r с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Задача

Найти уравнение окружности с центром в точке (–3; 4), проходящей через начало координат.

Решение

Центр окружности имеет координаты (–3; 4). Поэтому уравнение этой окружности можно записать в виде $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = r^2$, где r — пока неизвестный радиус окружности. Найдём его. Для этого воспользуемся тем, что окружность проходит через начало координат, т. е. координаты точки $O\ (0; 0)$ удовлетворяют этому уравнению: $(0 + 3)^2 + (0 - 4)^2 = r^2$. Отсюда $r^2 = 25$, и, значит, $r = 5$. Итак, искомое уравнение окружности имеет вид $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получится уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$, которое также является уравнением данной окружности.

95 Уравнение прямой

Выведем уравнение данной прямой l в заданной прямоугольной системе координат. Отметим две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ так, чтобы прямая l была серединным перпендикуляром к отрезку AB (рис. 287, *а*). Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой l, то $AM = BM$, или $AM^2 = BM^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2. \qquad (2)$$

Если же точка $M(x; y)$ не лежит на прямой l, то $AM^2 \neq BM^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (2). Следовательно, уравнение (2) является уравнением прямой l в заданной системе координат. После возведения выражений в скобках в квадрат и приведения подобных членов уравнение (2) принимает вид

$$ax + by + c = 0, \qquad (3)$$

где $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$. Так как $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — различные точки, то хотя бы одна из разностей $(x_1 - x_2)$ и $(y_1 - y_2)$ не равна нулю, т. е. хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля. Таким образом, **уравнение прямой в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени.**

Если в уравнении (3) коэффициент b отличен от нуля, то это уравнение можно записать так:

$$y = kx + d,$$

где $k = -\frac{a}{b}$, $d = -\frac{c}{b}$. Число k называется **угловым коэффициентом прямой,** заданной этим уравнением. Докажите самостоятельно, что:

две параллельные прямые, не параллельные оси Oy, имеют одинаковые угловые коэффициенты; если две прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то эти прямые параллельны.

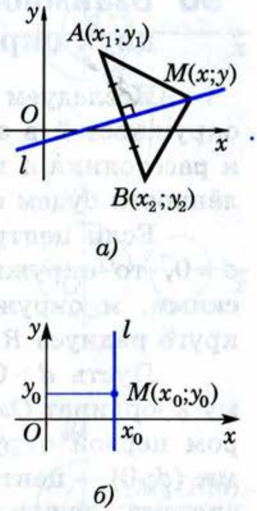


Рис. 287

Выведем уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельной оси Oy (рис. 287, б). Абсцисса любой точки $M(x; y)$ прямой l равна x_0, т. е. координаты любой точки $M(x; y)$ прямой l удовлетворяют уравнению $x = x_0$. В то же время координаты любой точки, не лежащей на прямой l, этому уравнению не удовлетворяют. Следовательно, уравнение $x = x_0$ является уравнением прямой l.

Ясно, что ось Ox имеет уравнение $y = 0$, а ось Oy — уравнение $x = 0$.

96 Взаимное расположение двух окружностей

Исследуем взаимное расположение двух окружностей в зависимости от их радиусов r, R и расстояния d между их центрами. Для определённости будем считать, что $r \leqslant R$.

Если центры окружностей совпадают, т. е. $d = 0$, то окружности называются **концентрическими**, и окружность радиуса r лежит внутри круга радиуса R (рис. 288, а).

Пусть $d > 0$. Введём прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы точка O была центром первой окружности, а точка с координатами $(d; 0)$ — центром второй окружности. В этой системе координат уравнения первой и второй окружностей имеют вид

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (x - d)^2 + y^2 = r^2. \qquad (4)$$

Если система уравнений (4) имеет решением пару чисел $x = x_0$, $y = y_0$, то точка $M_0(x_0; y_0)$ является общей точкой данных окружностей (рис. 288, б), и обратно: если $M_0(x_0; y_0)$ — общая точка данных окружностей, то пара чисел $x = x_0$, $y = y_0$ является решением системы уравнений (4).

Пусть система (4) имеет решением пару чисел $x = x_0$, $y = y_0$, т. е. справедливы числовые равенства

$$x_0^2+y_0^2=R^2,\quad (x_0-d)^2+y_0^2=r^2. \qquad (5)$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем равенство $2x_0d-d^2=R^2-r^2$, откуда

$$x_0=\frac{1}{2d}(R^2+d^2-r^2). \qquad (6)$$

Заметим, что $x_0>0$, поскольку $R\geqslant r$ и $d>0$. Кроме того, как следует из первого равенства (5), $x_0=\sqrt{R^2-y_0^2}\leqslant R$, т. е. для величин R, r и d должно выполняться неравенство $\frac{1}{2d}(R^2+d^2-r^2)\leqslant R$ или $R^2+d^2-r^2\leqslant 2dR$. Последнее неравенство запишем в виде $(d-R)^2\leqslant r^2$. Отсюда следует, что $-r\leqslant d-R\leqslant r$, или

$$R-r\leqslant d\leqslant R+r. \qquad (7)$$

Отметим, что $x_0=R$, если $d=R-r$ или $d=R+r$, и $x_0<R$, если $R-r<d<R+r$.

Итак, если система уравнений (4) имеет решение, то величина d удовлетворяет неравенствам (7). Поэтому, если не выполнено какое-то из неравенств (7), то система (4) не имеет решений и, следовательно, данные окружности не имеют общих точек. Так будет в двух случаях:

1) $d<R-r$, т. е. $d+r<R$ (рис. 288, *в*). В этом случае окружность радиуса r лежит внутри круга радиуса R. Говорят также, что **одна окружность лежит внутри другой.**

2) $d>R+r$ (рис. 288, *г*). В этом случае говорят, что **одна окружность лежит вне другой.**

Если неравенства (7) выполнены, то возможны три случая:

3) $d=R-r$, при этом $R>r$, поскольку $d>0$. Как уже было отмечено, в этом случае $x_0=R$, поэтому из первого из равенств (5) следует, что $y_0=0$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что пара чисел $x=R$, $y=0$ есть решение системы (4). Таким образом, в данном случае окружности имеют ровно одну общую точку, и их взаимное расположение изображено на рисунке 288, *д*. Говорят, что **окружности касаются изнутри.**

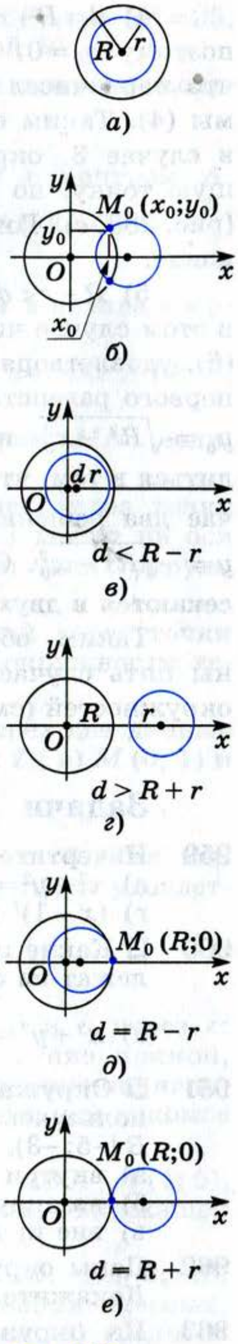


Рис. 288

4) $d = R + r$. В этом случае также $x_0 = R$, поэтому $y_0 = 0$, и непосредственно проверяется, что пара чисел $x = R$, $y = 0$ есть решение системы (4). Таким образом, в данном случае, как и в случае 3, окружности имеют ровно одну общую точку, но их взаимное расположение иное (рис. 288, *е*). Говорят, что **окружности касаются извне**.

5) $R - r < d < R + r$. Как уже было отмечено, в этом случае число x_0, определённое равенством (6), удовлетворяет неравенству $x_0 < R$, поэтому из первого равенства (5) получаем два значения y_0: $y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ и $y_0 = -\sqrt{R^2 - x_0^2}$. Нетрудно убедиться в том, что система (4) имеет в данном случае два решения: $x = x_0$, $y_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2}$ и $x = x_0$, $y = -\sqrt{R^2 - x_0^2}$. Следовательно, **окружности пересекаются в двух точках** (см. рис. 288, *б*).

Таким образом, если $d \neq 0$, то возможны пять случаев взаимного расположения двух окружностей (см. рис. 288, *б—е*).

Задачи

959 Начертите окружность, заданную уравнением:
а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$; в) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$; г) $(x-1)^2 + y^2 = 4$; д) $x^2 + (y+2)^2 = 2$.

960 ☐ Какие из точек $A\,(3; -4)$, $B\,(1; 0)$, $C\,(0; 5)$, $D\,(0; 0)$ и $E\,(0; 1)$ лежат на окружности, заданной уравнением:
а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$; в) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$?

961 ☐ Окружность задана уравнением $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 16$. Не пользуясь чертежом, укажите, какие из точек $A\,(-2; 4)$, $B\,(-5; -3)$, $C\,(-7; -2)$ и $D\,(1; 5)$ лежат:
а) внутри круга, ограниченного данной окружностью;
б) на окружности;
в) вне круга, ограниченного данной окружностью.

962 Даны окружность $x^2 + y^2 = 25$ и две точки $A\,(3; 4)$ и $B\,(4; -3)$. Докажите, что AB — хорда данной окружности.

963 На окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$, найдите точки: а) с абсциссой -4; б) с ординатой 3.

964 □ На окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y-5)^2=25$, найдите точки: а) с абсциссой 3; б) с ординатой 5.

965 Напишите уравнения окружностей с центром в начале координат и радиусами $r_1=3$, $r_2=\sqrt{2}$, $r_3=\frac{5}{2}$.

966 Напишите уравнение окружности радиуса r с центром A, если: а) $A(0; 5)$, $r=3$; б) $A(-1; 2)$, $r=2$; в) $A(-3; -7)$, $r=\frac{1}{2}$; г) $A(4; -3)$, $r=10$.

967 □ Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $B(-1; 3)$.

968 □ Напишите уравнение окружности с центром в точке $A(0; 6)$, проходящей через точку $B(-3; 2)$.

969 Напишите уравнение окружности с диаметром MN, если: а) $M(-3; 5)$, $N(7; -3)$; б) $M(2; -1)$, $N(4; 3)$.

970 Напишите уравнение окружности, проходящей через точку $A(1; 3)$, если известно, что центр окружности лежит на оси абсцисс, а радиус равен 5. Сколько существует таких окружностей?

971 Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(-3; 0)$ и $B(0; 9)$, если известно, что центр окружности лежит на оси ординат.

972 Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки: а) $A(1; -1)$ и $B(-3; 2)$; б) $C(2; 5)$ и $D(5; 2)$; в) $M(0; 1)$ и $N(-4; -5)$.

Решение

а) Уравнение прямой AB имеет вид $ax+by+c=0$. Так как точки A и B лежат на прямой AB, то их координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$a\cdot 1+b\cdot(-1)+c=0,\ a\cdot(-3)+b\cdot 2+c=0,$$
$$\text{или } a-b+c=0,\ -3a+2b+c=0.$$

Из этих уравнений выразим коэффициенты a и b через c: $a=3c$, $b=4c$. Подставив эти значения в уравнение прямой, получим $3cx+4cy+c=0$. При любом $c\neq 0$ это уравнение является уравнением прямой AB. Сократив на c, запишем искомое уравнение в виде $3x+4y+1=0$.

973 □ Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(4; 6)$, $B(-4; 0)$, $C(-1; -4)$. Напишите уравнение прямой, содержащей медиану CM.

974 □ Даны координаты вершин трапеции $ABCD$: $A(-2; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(7; 7)$ и $D(3; 1)$. Напишите уравнения прямых, содержащих: а) диагонали AC и BD трапеции; б) среднюю линию трапеции.

975 Найдите координаты точек пересечения прямой $3x - 4y + 12 = 0$ с осями координат. Начертите эту прямую.

976 Найдите координаты точки пересечения прямых $4x + 3y - 6 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$.

977 Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $M(2; 5)$ и параллельных осям координат.

978 Начертите прямую, заданную уравнением: а) $y = 3$; б) $x = -2$; в) $y = -4$; г) $x = 7$.

979 Найдите ординату точки M, лежащей на прямой AB, если известно, что $A(-8; -6)$, $B(-3; -1)$ и абсцисса точки M равна 5.

980 Напишите уравнения прямых, содержащих стороны ромба, диагонали которого равны 10 см и 4 см, если известно, что его диагонали лежат на осях координат.

Использование уравнений окружности и прямой при решении задач

981 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек, для каждой из которых расстояние от точки A в два раза больше расстояния от точки B.

Решение

Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 289, *а*. Тогда точки A и B имеют координаты $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, где $a = AB$.

Найдём расстояния от произвольной точки $M(x; y)$ до точек A и B:

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$BM = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}.$$

Если точка $M(x; y)$ принадлежит искомому множеству, то

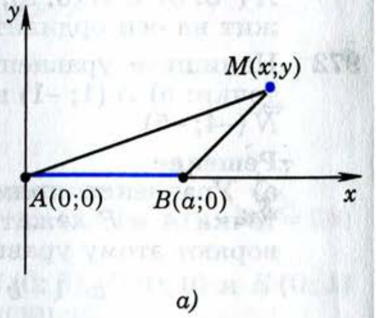
$$AM = 2BM, \text{ или } AM^2 = 4BM^2.$$

Поэтому её координаты удовлетворяют уравнению

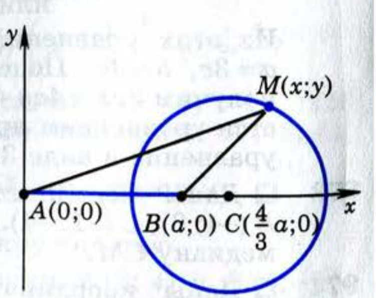
$$x^2 + y^2 = 4\left((x - a)^2 + y^2\right). \quad (8)$$

Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то её координаты не удовлетворяют этому уравнению.

Следовательно, уравнение (8) и есть уравнение искомого множества точек в выбранной системе



а)



б)

Рис. 289

координат. Раскрывая скобки и группируя слагаемые соответствующим образом, приводим уравнение (8) к виду

$$\left(x-\frac{4}{3}a\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2.$$

Таким образом, искомым множеством точек является окружность радиуса $\frac{2}{3}a$ с центром в точке $C\left(\frac{4}{3}a; 0\right)$. Эта окружность изображена на рисунке 289, *б*.

Замечание

Аналогично можно доказать, что множеством всех точек M, удовлетворяющих условию $AM=kBM$, где k — данное положительное число, не равное единице, является окружность радиуса $\frac{ka}{|k^2-1|}$ с центром в точке $\left(\frac{k^2a}{k^2-1}; 0\right)$.

Эти окружности, соответствующие различным значениям $k\neq 1$, называют **окружностями Аполлония**, поскольку они рассматривались ещё древнегреческим математиком Аполлонием в его трактате «О кругах» во II в. до н. э.

Если $k=1$, то задача сводится к известной нам задаче о нахождении множества всех точек, равноудалённых от точек A и B. Таким множеством, как мы знаем, является серединный перпендикуляр к отрезку AB.

982 Точка B — середина отрезка AC, длина которого равна 2. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых: а) $AM^2+BM^2+CM^2=50$; б) $AM^2+2BM^2+3CM^2=4$.

983 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2+BM^2=k^2$, где k — данное число.

984 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2-BM^2=k$, где k — данное число.

Решение

Введём прямоугольную систему координат так, чтобы точка A была началом координат, а точка B имела координаты $(a; 0)$, где $a=AB$. Найдём расстояния от произвольной точки $M\ (x; y)$ до точек A и B: $AM=\sqrt{x^2+y^2}$, $BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

Если точка $M\ (x; y)$ принадлежит искомому множеству, то $AM^2-BM^2=k$, поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению $x^2+y^2-(x-a)^2-y^2=k$, или $2ax-a^2-k=0$.

Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то её координаты не удовлетворяют этому уравнению. Итак, полученное уравнение является уравнением искомого множества точек. Но этим уравнением определяется прямая, параллельная оси Oy, если $a^2+k\neq 0$, и сама ось Oy, если $a^2+k=0$. Таким образом, искомым множеством точек является прямая, перпендикулярная к прямой AB.

985 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $BM^2 - AM^2 = 2AB^2$.

986 Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых

$$(AM^2 + DM^2) - (BM^2 + CM^2) = 2AB^2.$$

987* Дан ромб $ABCD$, диагонали которого равны $2a$ и $2b$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых

$$AM^2 + DM^2 = BM^2 + CM^2.$$

Вопросы для повторения к главе X

1 Сформулируйте и докажите лемму о коллинеарных векторах.

2 Что значит разложить вектор по двум данным векторам?

3 Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

4 Объясните, как вводится прямоугольная система координат.

5 Что такое координатные векторы?

6 Сформулируйте и докажите утверждение о разложении произвольного вектора по координатным векторам.

7 Что такое координаты вектора? Чему равны координаты координатных векторов? Как связаны между собой координаты равных векторов?

8 Сформулируйте и докажите правила нахождения координат суммы и разности векторов, а также произведения вектора на число по заданным координатам векторов.

9 Что такое радиус-вектор точки? Докажите, что координаты точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

10 Выведите формулы для вычисления координат вектора по координатам его начала и конца.

11 Выведите формулы для вычисления координат середины отрезка по координатам его концов.

12 Выведите формулу для вычисления длины вектора по его координатам.

13 Выведите формулу для вычисления расстояния между двумя точками по их координатам.

14 Приведите пример решения геометрической задачи с применением метода координат.

15 Какое уравнение называется уравнением данной линии? Приведите пример.

16 Выведите уравнение окружности данного радиуса с центром в данной точке.

17 Напишите уравнение окружности данного радиуса с центром в начале координат.

18 Выведите уравнение данной прямой в прямоугольной системе координат.

19 Что такое угловой коэффициент прямой?

20 Докажите, что: две параллельные прямые, не параллельные оси Oy, имеют одинаковые угловые коэффициенты; если две прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то эти прямые параллельны.

21 Напишите уравнения прямых, проходящих через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельных осям координат.

22 Напишите уравнения осей координат.

23 Исследуйте взаимное расположение двух окружностей в зависимости от их радиусов и расстояния между их центрами. Сформулируйте полученные выводы.

24 Приведите примеры использования уравнений окружности и прямой при решении геометрических задач.

Дополнительные задачи

988 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите такое число x (если это возможно), чтобы векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ были коллинеарны:

а) $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + x\vec{b}$;

б) $\vec{p} = x\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + x\vec{b}$;

в) $\vec{p} = \vec{a} + x\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$;

г) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = x\vec{a} + \vec{b}$.

989 Найдите координаты вектора $\vec{p}$ и его длину, если:

а) $\vec{p} = 7\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a}\{1; -1\}$, $\vec{b}\{5; -2\}$;

б) $p = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{a}\{6; 3\}$, $\vec{b}\{5; 4\}$;

в) $\vec{p} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{a}\left\{\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right\}$, $\vec{b}\{6; -1\}$;

г) $\vec{p} = 3(-2\vec{a} - 4\vec{b})$, $\vec{a}\{1; 5\}$, $\vec{b}\{-1; -1\}$.

990 Даны векторы $\vec{a}\{3; 4\}$, $\vec{b}\{6; -8\}$, $\vec{c}\{1; 5\}$.

а) Найдите координаты векторов $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{r} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{s} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

б) Найдите $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$.

991 Докажите, что расстояние между любыми двумя точками $M_1(x_1; 0)$ и $M_2(x_2; 0)$ оси абсцисс вычисляется по формуле $d = |x_1 - x_2|$.

992 Докажите, что треугольник ABC, вершины которого имеют координаты $A(4; 8)$, $B(12; 11)$, $C(7; 0)$, является равнобедренным, но не равносторонним.

993 Докажите, что углы A и C треугольника ABC равны, если $A(-5; 6)$, $B(3; -9)$ и $C(-12; -17)$.

994 Докажите, что точка D равноудалена от точек A, B и C, если:
а) $D(1; 1)$, $A(5; 4)$, $B(4; -3)$, $C(-2; 5)$;
б) $D(1; 0)$, $A(7; -8)$, $B(-5; 8)$, $C(9; 6)$.

995 На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек $M_1(-2; 4)$ и $M_2(6; 8)$.

996 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-5; 13)$, $B(3; 5)$, $C(-3; -1)$. Найдите: а) координаты середин сторон треугольника; б) медиану, проведённую к стороне AC; в) средние линии треугольника.

997 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$, вершины которого имеют координаты $A(3; 2)$, $B(0; 5)$, $C(-3; 2)$, $D(0; -1)$, является квадратом.

998 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$, вершины которого имеют координаты $A(-2; -3)$, $B(1; 4)$, $C(8; 7)$, $D(5; 0)$, является ромбом. Найдите его площадь.

999 Найдите координаты четвёртой вершины параллелограмма по заданным координатам трёх его вершин: $(-4; 4)$, $(-5; 1)$ и $(-1; 5)$. Сколько решений имеет задача?

1000 Выясните, какие из данных уравнений являются уравнениями окружности. Найдите координаты центра и радиус каждой окружности:
а) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$;
б) $x^2+(y+7)^2=1$;
в) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$;
г) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
д) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.

1001 Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A(3; 0)$ и $B(-1; 2)$, если центр её лежит на прямой $y=x+2$.

1002 Напишите уравнение окружности, проходящей через три данные точки:
а) $A(1; -4)$, $B(4; 5)$, $C(3; -2)$;
б) $A(3; -7)$, $B(8; -2)$, $C(6; 2)$.

1003 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-7; 5)$, $B(3; -1)$, $C(5; 3)$. Составьте уравнения: а) серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; б) прямых AB, BC и CA; в) прямых, на которых лежат средние линии треугольника.

1004 Докажите, что прямые, заданные уравнениями $3x-1{,}5y+1=0$ и $2x-y-3=0$, параллельны.

1005 Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой, если: а) $A\,(-2;\,0)$, $B\left(3;\,2\frac{1}{2}\right)$, $C\,(6;\,4)$; б) $A\,(3;\,10)$, $B\,(3;\,12)$, $C\,(3;\,-6)$; в) $A\,(1;\,2)$, $B\,(2;\,5)$, $C\,(-10;\,-31)$.

Применение метода координат к решению задач

1006 Две стороны треугольника равны 17 см и 28 см, а высота, проведённая к большей из них, равна 15 см. Найдите медианы треугольника.

1007 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

1008 Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для всех точек M величина $(AM^2 + CM^2) - (BM^2 + DM^2)$ имеет одно и то же значение.

1009 Докажите, что медиану AA_1 треугольника ABC можно вычислить по формуле $AA_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2AC^2 + 2AB^2 - BC^2}$. Используя эту формулу, докажите, что если две медианы треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

1010 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых:
а) $2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$; б) $2AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$.

Глава XI

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов

В этой главе получит дальнейшее развитие тригонометрический аппарат геометрии — синус, косинус, тангенс и котангенс будут определены для углов от 0° до 180°. Это даст возможность вывести формулы, связывающие между собой стороны и углы произвольного треугольника. Утверждения об этих формулах называются теоремой синусов и теоремой косинусов. Они широко используются как в самой геометрии, так и в её приложениях, в частности при проведении измерительных работ на местности. Кроме того, в этой главе вводится ещё одно действие над векторами — скалярное умножение векторов. С одной стороны, оно расширяет наши возможности в применении координатно-векторного метода при решении геометрических задач, а с другой — используется в физике для описания физических величин.

§1 Синус, косинус, тангенс, котангенс угла

97 Синус, косинус, тангенс, котангенс

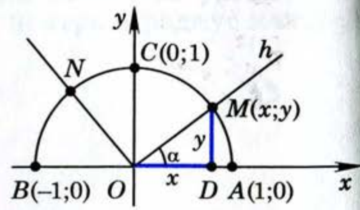


Рис. 290

Введём прямоугольную систему координат Oxy и построим полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, расположенную в первом и втором квадрантах (рис. 290). Назовём её **единичной полуокружностью.** Из точки O проведём луч h, пересекающий единичную полуокружность в точке $M\,(x;\,y)$. Обозначим буквой α угол между лучом h и положительной полуосью абсцисс (если луч h совпадает с положительной полуосью абсцисс, то будем считать, что $\alpha = 0°$).

Если угол α острый, то из прямоугольного треугольника DOM (см. рис. 290) имеем

$$\sin\alpha = \frac{MD}{OM},\ \cos\alpha = \frac{OD}{OM}.$$

Но $OM = 1$, $MD = y$, $OD = x$, поэтому

$$\sin\alpha = y,\ \cos\alpha = x. \qquad (1)$$

Итак, синус острого угла α равен ординате y точки M, а косинус угла α — абсциссе x точки M. Если угол α прямой, тупой или развёрнутый (углы AOC, AON и AOB на рисунке 290) или $\alpha = 0°$, то синус и косинус угла α также определим по формулам (1). Таким образом, **для любого угла α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ синусом угла α называется ордината y точки M, а косинусом угла α — абсцисса x точки M.** Так как координаты $(x; y)$ точек единичной полуокружности заключены в промежутках $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,\ -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Найдём значения синуса и косинуса для углов 0°, 90° и 180°. Для этого рассмотрим лучи OA, OC и OB, соответствующие этим углам (см. рис. 290). Так как точки A, C и B имеют координаты $A\,(1; 0)$, $C\,(0; 1)$, $B\,(-1; 0)$, то

$$\begin{aligned}&\sin 0° = 0,\ \sin 90° = 1,\ \sin 180° = 0,\\ &\cos 0° = 1,\ \cos 90° = 0,\ \cos 180° = -1.\end{aligned} \qquad (2)$$

Тангенсом угла α ($\alpha \neq 90°$) называется отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

При $\alpha = 90°$ $\operatorname{tg}\alpha$ не определён, поскольку $\cos 90° = 0$, и в формуле (3) знаменатель обращается в нуль. Используя формулы (2), находим: $\operatorname{tg} 0° = 0$, $\operatorname{tg} 180° = 0$.

Котангенсом угла α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) называется отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Котангенс угла α обозначается символом $\operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

При $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$ $\operatorname{ctg} \alpha$ не определён. Исходя из формул (2), получаем: $\operatorname{ctg} 90° = 0$.

98 Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения

На рисунке 290 изображены система координат Oxy и единичная полуокружность ACB с центром O. Эта полуокружность является дугой окружности, уравнение которой имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. Подставив сюда выражения для x и y из формул (1), получим равенство

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad (4)$$

которое выполняется для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Равенство (4) называется **основным тригонометрическим тождеством**. В 7 классе оно было доказано для острых углов.

Справедливы также следующие тождества:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha, \ \cos(90° - \alpha) = \sin \alpha$$

при $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$,

$$\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha, \ \cos(180° - \alpha) = -\cos a$$

при $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Они называются **формулами приведения** и доказываются в курсе алгебры.

99 Формулы для вычисления координат точки

Пусть задана система координат Oxy и дана произвольная точка $A(x; y)$ с неотрицательной ординатой y (рис. 291). Выразим координаты точки A через длину отрезка OA и угол α между лучом OA и положительной полуосью Ox. Для этого обозначим буквой M точку пересечения луча OA с единичной полуокружностью. По формулам (1) координаты точки M соответственно равны $\cos \alpha$, $\sin \alpha$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет те же координаты, что и точка M, т. е. $\overrightarrow{OM}\{\cos \alpha; \sin \alpha\}$. Вектор $\overrightarrow{OA}$ имеет те же координаты, что и точ-

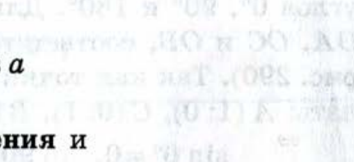


Рис. 291

ка A, т. е. $\overrightarrow{OA}\{x; y\}$. Но $\overrightarrow{OA} = OA \cdot \overrightarrow{OM}$ (объясните почему), поэтому

$$x = OA \cdot \cos\alpha,\ y = OA \cdot \sin\alpha.$$

Задачи

1011 Ответьте на вопросы: а) Может ли абсцисса точки единичной полуокружности иметь значения $0{,}3$; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$; $-2{,}8$? б) Может ли ордината точки единичной полуокружности иметь значения $0{,}6$; $\frac{1}{7}$; $-0{,}3$; 7; $1{,}002$? Ответы обоснуйте.

1012 Проверьте, что точки $M_1(0; 1)$, $M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ лежат на единичной полуокружности. Выпишите значения синуса, косинуса и тангенса углов AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4, AOB.

1013 Найдите $\sin\alpha$, если:
а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha = -1$.

1014 Найдите $\cos\alpha$, если:
а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; в) $\sin\alpha = 0$.

1015 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если:
а) $\cos\alpha = 1$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0° < \alpha < 90°$; г) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $90° < \alpha < 180°$.

1016 Вычислите синусы, косинусы и тангенсы углов 120°, 135°, 150°.

1017 Постройте $\angle A$, если:
а) $\sin A = \frac{2}{3}$; б) $\cos A = \frac{3}{4}$; в) $\cos A = -\frac{2}{5}$.

1018 Угол между лучом OA, пересекающим единичную полуокружность, и положительной полуосью Ox равен α. Найдите координаты точки A, если:
а) $OA = 3$, $\alpha = 45°$; б) $OA = 1{,}5$, $\alpha = 90°$; в) $OA = 5$, $\alpha = 150°$; г) $OA = 1$, $\alpha = 180°$; д) $OA = 2$, $\alpha = 30°$.

1019 Найдите угол между лучом OA и положительной полуосью Ox, если точка A имеет координаты:
а) $(2; 2)$; б) $(0; 3)$; в) $(-\sqrt{3}; 1)$; г) $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

§2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

100 Теорема о площади треугольника

Теорема

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $BC=a$, $CA=b$ и S — площадь этого треугольника. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

Введём систему координат с началом в точке C так, чтобы точка B лежала на положительной полуоси Cx, а точка A имела положительную ординату (рис. 292). Площадь данного треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}ah$, где h — высота треугольника. Но h равна ординате точки A, т. е. $h = b\sin C$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}ab\sin C$. **Теорема доказана.**

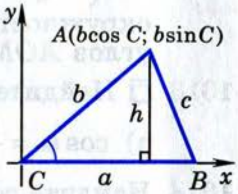


Рис. 292

101 Теорема синусов

Теорема

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

По теореме о площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,\ S = \frac{1}{2}bc\sin A,\ S = \frac{1}{2}ca\sin B.$$

Из первых двух равенств получаем: $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A$, откуда $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$. Точно так же из второго и третьего равенств следует, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

Итак, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. **Теорема доказана.**

Замечание

Можно доказать (см. задачу **1033**), что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно, для любого треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

102 Теорема косинусов

Теорема

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, например, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \qquad (1)$$

Введём систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке 293. Тогда точка B будет иметь координаты $(c; 0)$, а точка C — координаты $(b\cos A; b\sin A)$. По формуле расстояния между двумя точками получаем:

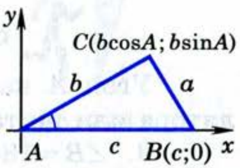


Рис. 293

$$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A =$$
$$= b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A - 2bc\cos A + c^2 =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Теорема доказана.

Теорему косинусов называют иногда **обобщённой теоремой Пифагора.** Такое название объясняется тем, что в теореме косинусов содержится как частный случай теорема Пифагора. В самом деле, если в треугольнике ABC угол A прямой, то $\cos A = \cos 90° = 0$ и по формуле (1) получаем

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

т. е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

103 Решение треугольников

Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (т. е. трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам, определяющим треугольник.

Рассмотрим три задачи на решение треугольника. При этом будем пользоваться такими обозначениями для сторон треугольника ABC: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

Задача 1

Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Дано: a, b, $\angle C$. Найти: c, $\angle A$, $\angle B$.

Решение

1. По теореме косинусов находим c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

2. Пользуясь теоремой косинусов, имеем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Угол A находим с помощью микрокалькулятора или по таблице.

3. $\angle B = 180° - \angle A - \angle C$.

Задача 2

Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам

Дано: a, $\angle B$, $\angle C$. Найти: $\angle A$, b, c.

Решение

1. $\angle A = 180° - \angle B - \angle C$.

2. С помощью теоремы синусов вычисляем b и c:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A},\ c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Задача 3

Решение треугольника по трём сторонам

Дано: a, b и c. Найти: $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

Решение

1. По теореме косинусов получаем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Угол A находим с помощью микрокалькулятора или по таблице.

2. Аналогично находим угол B.

3. $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$.

Пример

Футбольный мяч находится в точке A футбольного поля на расстояниях 23 м и 24 м от оснований B и C стоек ворот (рис. 294). Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол α попадания мяча в ворота, если ширина ворот равна 7 м.

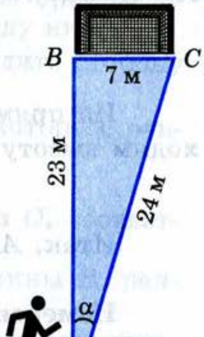


Рис. 294

Решение

Рассмотрим треугольник ABC, вершинами которого являются точка A расположения мяча и точки B и C в основаниях стоек ворот. По условию задачи $c = AB = 23$ м, $b = AC = 24$ м и $a = BC = 7$ м. Эти данные позволяют решить треугольник ABC и найти угол α, равный углу A (см. задачу 3). С помощью теоремы косинусов определяем $\cos A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2 \cdot 24 \cdot 23}.$$

Угол α находим по таблице: $\alpha \approx 16°57'$.

104 Измерительные работы

Тригонометрические формулы используются при проведении различных измерительных работ на местности.

Измерение высоты предмета. Предположим, что требуется определить высоту AH какого-то предмета (рис. 295). Для этого отметим точку B на определённом расстоянии a от основания H предмета и измерим угол ABH: $\angle ABH = \alpha$. По этим данным из прямоугольного треугольника AHB находим высоту предмета: $AH = a \operatorname{tg} \alpha$.

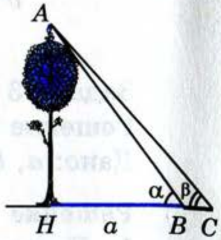


Рис. 295

Если основание предмета недоступно, то можно поступить так: на прямой, проходящей через основание H предмета, отметим две точки B и C на определённом расстоянии a друг от друга и измерим углы ABH и ACB: $\angle ABH = \alpha$ и $\angle ACB = \beta$ (см. рис. 295). Эти данные позволяют определить все элементы треугольника ABC, в частности AB. В самом деле, $\angle ABH$ — внешний угол треугольника ABC, поэтому $\angle A = \alpha - \beta$. Используя теорему синусов, находим AB:

$$AB = \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Из прямоугольного треугольника ABH находим высоту AH предмета:

$$AH = AB \cdot \sin \alpha.$$

Итак, $AH = \dfrac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$.

Измерение расстояния до недоступной точки. Предположим, что нам надо найти расстояние d от пункта A до недоступного пункта C (рис. 296). Напомним, что эту задачу мы уже решали в 8 классе с помощью признаков подобия треугольников. Рассмотрим теперь другой способ решения задачи — с использованием формул тригонометрии.

На местности выберем точку B и измерим длину c отрезка AB. Затем измерим, например с помощью астролябии, углы A и B: $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Эти данные, т. е. c, α и β, позволяют решить треугольник ABC и найти искомое расстояние $d = AC$.

Сначала находим $\angle C$ и $\sin C$:

$$\angle C = 180° - \alpha - \beta,$$

$$\sin C = \sin(180° - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta).$$

Затем с помощью теоремы синусов находим d. Так как $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$, $AC = d$, $AB = c$, $\angle B = \beta$, то $d = \dfrac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Аналогичным образом по так называемому параллаксу небесных светил определяют расстояния до этих светил.

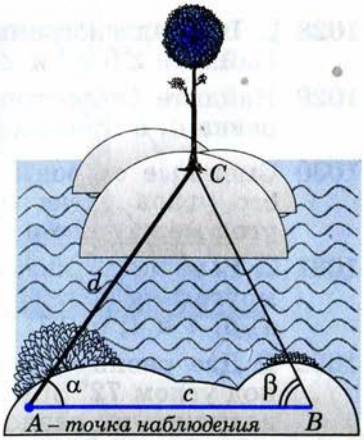


Рис. 296

Задачи

1020 ☐ Найдите площадь треугольника ABC, если: а) $AB = 6\sqrt{8}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 60°$; б) $BC = 3$ см, $AB = 18\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$; в) $AC = 14$ см, $CB = 7$ см, $\angle C = 48°$.

1021 Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

1022 ☐ Площадь треугольника ABC равна 60 см². Найдите сторону AB, если $AC = 15$ см, $\angle A = 30°$.

1023 ☐ Найдите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 10 см, а угол между диагоналями равен 30°.

1024 Найдите площадь треугольника ABC, если:
а) $\angle A = \alpha$, а высоты, проведённые из вершин B и C, соответственно равны h_b и h_c;
б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а высота, проведённая из вершины B, равна h.

1025 ☐ С помощью теорем синусов и косинусов решите треугольник ABC, если:
а) $\angle A = 60°$, $\angle B = 40°$, $c = 14$; б) $\angle A = 30°$, $\angle C = 75°$, $b = 4{,}5$;
в) $\angle A = 80°$, $a = 16$, $b = 10$; г) $\angle B = 45°$, $\angle C = 70°$, $a = 24{,}6$;
д) $\angle A = 60°$, $a = 10$, $b = 7$; е) $a = 6{,}3$, $b = 6{,}3$, $\angle C = 54°$;
ж) $b = 32$, $c = 45$, $\angle A = 87°$; з) $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$;
и) $a = 6$, $b = 7{,}3$, $c = 4{,}8$.

1026 ☐ В треугольнике ABC $AC = 12$ см, $\angle A = 75°$, $\angle C = 60°$. Найдите AB и S_{ABC}.

1027 ☐ Найдите стороны треугольника ABC, если $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, а высота AD равна 3 м.

1028 В параллелограмме $ABCD$ $AD = 7\frac{1}{3}$ м, $BD = 4{,}4$ м, $\angle A = 22°30'$. Найдите $\angle BDC$ и $\angle DBC$.

1029 Найдите биссектрисы треугольника, если одна из его сторон равна a, а прилежащие к этой стороне углы равны α и β.

1030 Смежные стороны параллелограмма равны a и b, а один из его углов равен α. Найдите диагонали параллелограмма и угол между ними.

1031 Выясните, является ли треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, если его стороны равны: а) 5, 4 и 4; б) 17, 8 и 15; в) 9, 5 и 6.

1032 Две равные по величине силы приложены к одной точке под углом 72° друг к другу. Найдите величины этих сил, если величина их равнодействующей равна 120 кг.

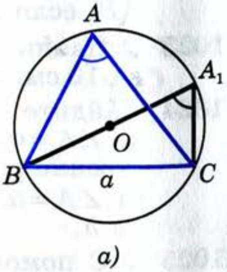
1033 Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

Решение

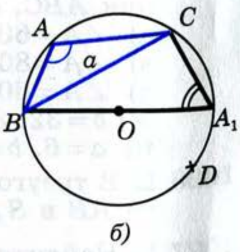
Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, или $BC = 2R \sin A$.

Проведём диаметр BA_1 (рис. 297) и рассмотрим треугольник A_1BC (случай, когда точки A_1 и C совпадают, рассмотрите самостоятельно). Угол C этого треугольника прямой, поэтому $BC = BA_1 \cdot \sin A_1$. Но $\sin A_1 = \sin A$. Действительно, если точка A_1 лежит на дуге BAC (рис. 297, *а*), то $\angle A_1 = \angle A$, а если на дуге BDC (рис. 297, *б*), то $\angle A_1 = 180° - \angle A$. И в том, и в другом случае $\sin A_1 = \sin A$. Следовательно,

$$BC = BA_1 \cdot \sin A, \text{ или } BC = 2R \sin A.$$



а)



б)

Рис. 297

1034 В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне, большее основание равно 10 см, а угол при основании равен 70°. Найдите периметр трапеции.

1035 В окружности проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке E. Найдите острый угол между этими хордами, если $AB = 13$ см, $CE = 9$ см, $ED = 4$ см и расстояние между точками B и D равно $4\sqrt{3}$ см.

1036 Наблюдатель находится на расстоянии 50 м от башни, высоту которой хочет определить (рис. 298). Основание башни он видит под углом 2° к горизонту, а вершину — под углом 45° к горизонту. Какова высота башни?

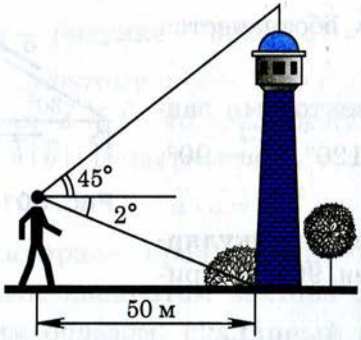


Рис. 298

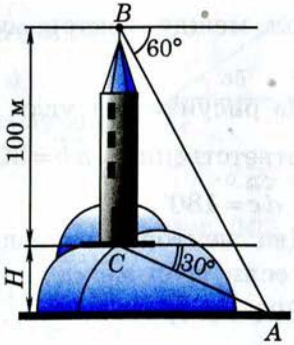


Рис. 299

1037 Для определения ширины реки отметили два пункта A и B на берегу реки на расстоянии 70 м друг от друга и измерили углы CAB и ABC, где C — дерево, стоящее на другом берегу у кромки воды. Оказалось, что $\angle CAB = 12°30'$, $\angle ABC = 72°42'$. Найдите ширину реки.

1038 На горе находится башня, высота которой равна 100 м (рис. 299). Некоторый предмет A у подножия горы наблюдают сначала с вершины B башни под углом 60° к горизонту, а потом с её основания C под углом 30°. Найдите высоту H горы.

§3 Скалярное произведение векторов

105 Угол между векторами

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (рис. 300). Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что **угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен** α. Ясно, что α не зависит от выбора точки O, от которой откладываются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (пользуясь рисунком 300, докажите это). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен

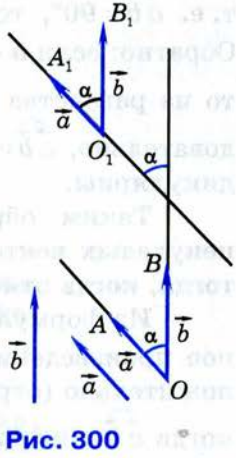


Рис. 300

$0°$. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

На рисунке 301 углы между векторами равны соответственно: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=30°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=120°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}}=90°$, $\widehat{\vec{d}\vec{f}}=0°$, $\widehat{\vec{d}\vec{c}}=180°$.

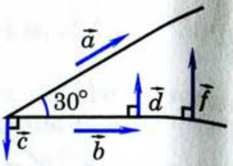


Рис. 301

Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен $90°$. На рисунке 301 $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{b}\perp\vec{d}$, $\vec{b}\perp\vec{f}$.

106 Скалярное произведение векторов

Мы знаем, как выполняется сложение векторов и умножение вектора на число. Введём ещё одно действие над векторами — скалярное умножение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

По определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}). \qquad (1)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, т. е. $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=90°$, то $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})=0$, и поэтому $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Обратно: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то из равенства (1) получаем $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})=0$, и, следовательно, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=90°$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Таким образом, **скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.**

Из формулы (1) также следует, что скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда $\widehat{\vec{a}\vec{b}}<90°$ ($\widehat{\vec{a}\vec{b}}>90°$).

На рисунке 302 $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 35°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}} = 90°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}} = 125°$, поэтому $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} < 0$.

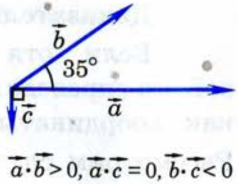


Рис. 302

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то по формуле (1) получаем $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. В частности,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. Таким образом, **скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

Скалярное произведение векторов широко используется в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы $\vec{F}$ при перемещении тела из точки M в точку N (рис. 303) равна произведению длин векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\overrightarrow{MN}$ на косинус угла между ними:

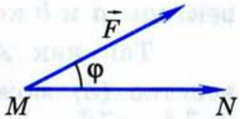


Рис. 303

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos\varphi.$$

Правая часть этого равенства представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\overrightarrow{MN}$, т. е. работа A силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению векторов силы и перемещения: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$.

107 Скалярное произведение в координатах

Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов.

Теорема

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \quad (2)$$

Доказательство

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость равенства (2) очевидна, так как координаты нулевого вектора равны нулю. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (рис. 304, *а*), то по теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\alpha. \qquad (3)$$

Это равенство верно и в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (рис. 304, *б*, *в*).

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то равенство (3) можно записать так: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}$, откуда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right). \qquad (4)$$

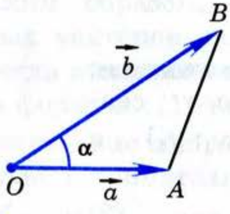
Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{b} - \vec{a}$ имеют координаты $\{x_1; y_1\}$, $\{x_2; y_2\}$ и $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, поэтому

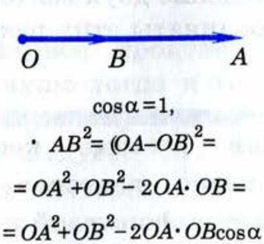
$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2,$$
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства (4), после несложных преобразований получим формулу (2). **Теорема доказана.**

Следствие 1

Ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.





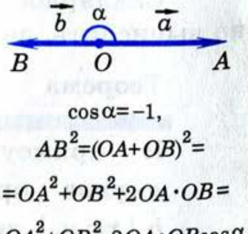


Рис. 304

Следствие 2

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \quad (5)$$

В самом деле, так как $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha$, то $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Подставив сюда выражения для $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим формулу (5).

108 Свойства скалярного произведения векторов

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1^0. $\vec{a}^2 \geqslant 0$, причём $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq 0$.

2^0. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон).

3^0. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон).

4^0. $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон).

Утверждение 1^0 непосредственно следует из формулы $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, а утверждение 2^0 — из определения скалярного произведения. Докажем утверждения 3^0 и 4^0.

Введём прямоугольную систему координат и обозначим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ так:

$$\vec{a}\,\{x_1; y_1\},\ \vec{b}\,\{x_2; y_2\},\ \vec{c}\,\{x_3; y_3\}.$$

Используя формулу (2), получаем

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = (x_1+x_2)\,x_3 + (y_1+y_2)\,y_3 =$$
$$= (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3) = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Утверждение 3^0 доказано.

Докажем теперь утверждение 4^0. Вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_1; ky_1\}$, поэтому $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = (kx_1)\,x_2 + (ky_1)\,y_2 = k\,(x_1x_2 + y_1y_2) = k\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Замечание

Ясно, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например,

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d} = \vec{a}\cdot\vec{d} + \vec{b}\cdot\vec{d} + \vec{c}\cdot\vec{d}.$$

Задачи

1039 Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; ж) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DB}$; з) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$.

1040 Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, и диагональ BD равна стороне ромба. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$; д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

1041 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними равен: а) 45°; б) 90°; в) 135°.

1042 В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1043 К одной и той же точке приложены две силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие под углом 120° друг к другу, причём $|\vec{P}| = 8$, $|\vec{Q}| = 15$. Найдите величину равнодействующей силы $\vec{R}$.

1044 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a}\left\{\frac{1}{4}; -1\right\}$, $\vec{b}\{2; 3\}$; б) $\vec{a}\{-5; 6\}$, $\vec{b}\{6; 5\}$;

в) $\vec{a}\{1{,}5; 2\}$, $\vec{b}\{4; -0{,}5\}$.

1045 Докажите, что ненулевые векторы $\vec{a}\{x; y\}$ и $\vec{b}\{-y; x\}$ перпендикулярны.

1046 Докажите, что векторы $\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{i}-\vec{j}$ перпендикулярны, если $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

1047 При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если: а) $\vec{a}\{4; 5\}$, $\vec{b}\{x; -6\}$; б) $\vec{a}\{x; -1\}$, $\vec{b}\{3; 2\}$; в) $\vec{a}\{0; -3\}$, $\vec{b}\{5; x\}$?

1048 Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A\ (2;\ 8)$, $B\ (-1;\ 5)$, $C\ (3;\ 1)$.

1049 Найдите углы треугольника с вершинами $A\ (-1;\ \sqrt{3})$, $B\ (1;\ -\sqrt{3})$ и $C\left(\frac{1}{2};\ \sqrt{3}\right)$.

1050 Вычислите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=60°$.

1051 Известно, что $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=\widehat{\vec{b}\vec{c}}=60°$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$.

1052 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=4$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1053 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Применение скалярного произведения векторов к решению задач

1054 Докажите, что если AM — медиана треугольника ABC, то $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Пользуясь этой формулой, докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.

Решение

Точка M — середина отрезка BC, поэтому $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Отсюда получаем

$$(2\overrightarrow{AM})\cdot(2\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=$$
$$=AB^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A+AC^2,$$

или $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Второе утверждение задачи докажите самостоятельно.

1055 Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведённые к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

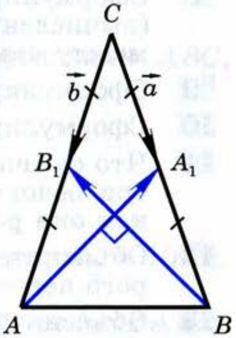


Рис. 305

Решение

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и AA_1, BB_1 — его медианы, проведённые к боковым сторонам (рис. 305). Введём обозначения $\overrightarrow{CA_1}=\vec{a}$,

$\overrightarrow{CB_1}=\vec{b}, CA_1=CB_1=a$. Тогда $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-2\vec{b}, \overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CB_1}-\overrightarrow{CB}=$
$=\vec{b}-2\vec{a}$, поэтому

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})=5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}. \quad (6)$$

По условию задачи $AA_1 \perp BB_1$ и, следовательно, $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$. Далее, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2\cos C$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=a^2$, поэтому равенство (6) принимает вид $0=5a^2\cos C-4a^2$. Отсюда получаем $\cos C=\frac{4}{5}$, $\angle C\approx 36°52'$.

1056 Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Вопросы для повторения к главе XI

1 Начертите оси координат и постройте единичную полуокружность.

2 Объясните, что такое синус и косинус угла α из промежутка $0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$.

3 Что называется тангенсом угла α? Для какого значения α тангенс не определён и почему?

4 Что называется котангенсом угла α? Для каких значений α котангенс не определён и почему?

5 Докажите основное тригонометрическое тождество.

6 Напишите формулы приведения.

7 Выведите формулы, выражающие координаты точки A с неотрицательной ординатой через длину отрезка OA и угол между лучом OA и положительной полуосью Ox.

8 Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника (вычисление площади треугольника по двум сторонам и углу между ними).

9 Сформулируйте и докажите теорему синусов.

10 Сформулируйте и докажите теорему косинусов.

11 Что означают слова «решение треугольника»? Сформулируйте три основные задачи на решение треугольника и объясните, как они решаются.

12 Объясните, как определить высоту предмета, основание которого недоступно.

13 Объясните, как измерить расстояние до недоступной точки.

14 Объясните, что означают слова «угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α». В каком случае угол между векторами считается равным $0°$?

15 Какие два вектора называются перпендикулярными?

16 Что такое скалярное произведение двух векторов?

17 В каком случае скалярное произведение ненулевых векторов: а) равно 0; б) больше 0; в) меньше 0?

18 Выведите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты.

19 Запишите условие перпендикулярности двух ненулевых векторов с координатами $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$.

20 Выведите формулу, выражающую косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты.

21 Сформулируйте и докажите утверждения о свойствах скалярного произведения векторов.

22 Приведите пример использования скалярного произведения векторов при решении геометрических задач.

Дополнительные задачи

1057 В равнобедренном треугольнике ABC $AB = AC = b$, $\angle A = 30°$. Найдите высоты BE и AD, а также отрезки AE, EC, BC.

1058 Найдите площадь треугольника ABC, если:
а) $BC = 4{,}125$ м, $\angle B = 44°$, $\angle C = 72°$;
б) $BC = 4100$ м, $\angle A = 32°$, $\angle C = 120°$.

1059 Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

1060 Используя теорему синусов, решите треугольник ABC, если:
а) $AB = 8$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$;
б) $AB = 5$ см, $\angle B = 45°$, $\angle C = 60°$;
в) $AB = 3$ см, $BC = 3{,}3$ см, $\angle A = 48°30'$;
г) $AC = 10{,}4$ см, $BC = 5{,}2$ см, $\angle B = 62°48'$.

1061 Используя теорему косинусов, решите треугольник ABC, если:
а) $AB = 5$ см, $AC = 7{,}5$ см, $\angle A = 135°$;
б) $AB = 2\sqrt{2}$ дм, $BC = 3$ дм, $\angle B = 45°$;
в) $AC = 0{,}6$ м, $BC = \frac{\sqrt{3}}{4}$ дм, $\angle C = 150°$.

1062 В треугольнике DEF $DE = 4{,}5$ дм, $EF = 9{,}9$ дм, $DF = 70$ см. Найдите углы треугольника.

1063 Найдите биссектрису AD треугольника ABC, если $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$.

1064 Чтобы определить расстояние между точками A и B, которое нельзя измерить, выбирают третью точку C, из которой видны точки A и B. Измерив угол ACB и расстояния AC и CB, находят расстояние AB. Найдите AB, если $AC = b$, $CB = a$, $\angle ACB = \alpha$.

1065 Докажите, что треугольник с вершинами $A(3; 0)$, $B(1; 5)$ и $C(2; 1)$ тупоугольный. Найдите косинус тупого угла.

1066 Найдите длину вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

1067 Найдите диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $\widehat{\vec{p}\vec{q}} = 45°$.

1068 При каком значении x векторы $\vec{p} = x\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 120°$?

1069 В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Найдите острый угол между этими медианами.

1070 В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ см и $BC = 8$ см боковая сторона равна $4\sqrt{7}$ см, а $\angle ADC = 60°$. Через вершину C проведена прямая l, делящая трапецию на два многоугольника, площади которых равны. Найдите площадь трапеции и длину отрезка прямой l, заключённого внутри трапеции.

1071 В треугольнике ABC, площадь которого равна $3\sqrt{3}$, угол A острый, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 3$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

1072 Дан ромб $MNPQ$. Отрезок MF — биссектриса треугольника MPQ, $\angle NMQ = 4\alpha$, $FQ = a$. Найдите площадь данного ромба.

Применение скалярного произведения векторов к решению задач

1073 Четырёхугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A(-1; 2)$, $B(1; -2)$, $C(2; 0)$, $D(1; 6)$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, и найдите её площадь.

Решение

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ имеют координаты: $\overrightarrow{AD}\{2; 4\}$, $\overrightarrow{BC}\{1; 2\}$. Эти векторы коллинеарны, так как их координаты пропорциональны. По координатам векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ находим их длины: $AD = \sqrt{20}$, $BC = \sqrt{5}$. Таким образом, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, следовательно, $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC. Пусть S — площадь трапеции $ABCD$. Согласно утверждению задачи **1059**, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$, где α — угол между AC и BD. По формуле (5) § 3 найдём сначала $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}})$. Так как $\overrightarrow{AC}\{3; -2\}$, $\overrightarrow{BD}\{0; 8\}$, то $AC = \sqrt{13}$, $BD = 8$ и $\cos(\widehat{\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD}}) =$

$= \frac{3 \cdot 0 - 16}{\sqrt{13} \cdot 8} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$. Отсюда следует, что $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Таким образом, $S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot 8 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 12$.

1074 Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC и $BM = kMC$. Докажите, что

$$(1+k)^2\, AM^2 = k^2 b^2 + 2bck \cos A + c^2,$$

где $b = AC$, $c = AB$.

Решение

По условию задачи M лежит на отрезке BC и $BM = kMC$, поэтому $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MC}$ или $\overrightarrow{BM} = k(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM})$. Следовательно,

$$\overrightarrow{BM} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{BC} = \frac{k}{1+k}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

По правилу треугольника сложения векторов $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, или $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}$. Таким образом,

$$(1+k)\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

Отсюда получаем:

$$(1+k)^2\,(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC})\,(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}) =$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 2k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + k^2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Так как

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} = AM^2,\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = c^2,$$
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2,\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bc \cos A,$$

то полученная формула совпадает с искомой формулой.

1075 В треугольнике ABC отрезок AD — биссектриса, AM — медиана, $b = AC$, $c = AB$. Докажите, что:

а) $AD = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$;

б) $AM = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}$.

1076 Диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны. Докажите, что этот параллелограмм является ромбом.

1077 Докажите, что коэффициент подобия двух подобных треугольников равен отношению радиусов окружностей: а) описанных около треугольников; б) вписанных в эти треугольники.

Глава XII

Длина окружности и площадь круга

Вы знаете, как измеряются отрезки и как измеряются площади многоугольников. Вам известны формулы, по которым можно вычислить площади треугольника и некоторых четырёхугольников. А как вычислить длину окружности и площадь круга, если известен их радиус? Ответ на этот вопрос вы найдёте в этой главе. Но сначала нам предстоит познакомиться с красивыми геометрическими фигурами — правильными многоугольниками, вывести для них важные формулы, а затем уже с их помощью мы получим формулы длины окружности и площади круга.

§1 Правильные многоугольники

109 Правильный многоугольник

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Примерами правильных многоугольников являются равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке 306 изображены правильные пятиугольник, семиугольник и восьмиугольник.

Выведем формулу для вычисления угла α_n правильного n-угольника. Сумма всех углов такого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$, причём все его углы равны, поэтому

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n}\cdot 180°.$$

110 Окружность, описанная около правильного многоугольника

Напомним, что окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности. Докажем теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

Рис. 306

Теорема

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Доказательство

Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — правильный многоугольник, O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 (рис. 307).

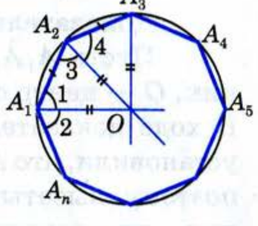


Рис. 307

Соединим точку O отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Так как $\angle A_1 = \angle A_2$, то $\angle 1 = \angle 3$, поэтому треугольник A_1A_2O равнобедренный: в нём $OA_1 = OA_2$. Треугольники A_1A_2O и A_2A_3O равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — общая сторона и $\angle 3 = \angle 4$), следовательно, $OA_3 = OA_1$. Точно так же можно доказать, что $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ и т. д.

Итак, $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1, A_2, A_3. Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ можно описать только одну окружность. **Теорема доказана.**

111 Окружность, вписанная в правильный многоугольник

Напомним, что окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности.

Докажем теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Теорема

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Доказательство

Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник, O — центр описанной окружности (рис. 308). В ходе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = ... = \triangle OA_nA_1$, поэтому высоты этих треугольников, проведённые из вершины O, также будут равны: $OH_1 = OH_2 = ... = OH_n$. Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, ..., H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписана в данный правильный многоугольник.

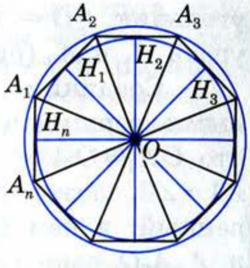
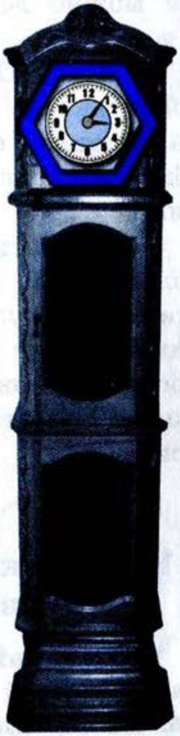


Рис. 308

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна.

Предположим, что наряду с окружностью с центром O и радиусом OH_1 есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2...A_n$. Тогда её центр O_1 равноудалён от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. равен OH_1. Таким образом, вторая окружность совпадает с первой. **Теорема доказана.**



Следствие 1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Эта точка называется **центром правильного многоугольника.**

112 Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности

Пусть S — площадь правильного n-угольника, a_n — его сторона, P — периметр, а r и R — радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем сначала, что

$$S = \frac{1}{2}Pr. \qquad (1)$$

Соединим центр данного многоугольника с его вершинами (см. рис. 308). Тогда многоугольник разобьётся на n равных треугольников, площадь каждого из которых будет равна $\frac{1}{2}a_n r$. Следовательно,

$$S = n \cdot \frac{1}{2}a_n r = \frac{1}{2}(na_n)\,r = \frac{1}{2}Pr.$$

Выведем далее формулы:

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}, \qquad (2)$$

$$r = R\cos\frac{180°}{n}. \qquad (3)$$

Для вывода этих формул воспользуемся рисунком 308. В прямоугольном треугольнике A_1H_1O

$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n}\cdot 180° = 90° - \frac{180°}{n}.$$

Следовательно,

$$a_n = 2A_1H_1 = 2R\cos\left(90° - \frac{180°}{n}\right) = 2R\sin\frac{180°}{n},$$

$$r = OH_1 = R\sin\left(90° - \frac{180°}{n}\right) = R\cos\frac{180°}{n}.$$

Полагая в формуле (2) $n = 3$, 4 и 6, получим выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника:

$$a_3 = 2R\sin\frac{180°}{3} = 2R\sin 60° = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3},$$

$$a_4 = 2R\sin\frac{180°}{4} = 2R\sin 45° = 2R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2},$$

$$a_6 = 2R\sin\frac{180°}{6} = 2R\sin 30° = 2R\cdot\frac{1}{2} = R. \quad (4)$$

113 Построение правильных многоугольников

Рассмотрим способы построения некоторых правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Построения правильного треугольника и правильного четырёхугольника, т. е. квадрата, рассматривались ранее. Для построения правильных n-угольников при $n > 4$ обычно используется окружность, описанная около многоугольника.

Задача 1

Построить правильный шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой (4). Пусть PQ — данный отрезок. Построим окружность радиуса PQ и отметим на ней произвольную точку A_1 (рис. 309). Затем, не меняя раствора циркуля, построим на этой окружности точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, чтобы выполнялись равенства $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Соединяя последовательно построенные точки отрезками, получим искомый правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

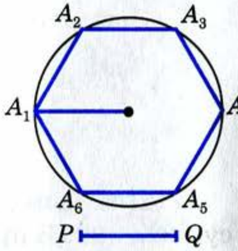


Рис. 309

Для построения правильных многоугольников часто используется следующая задача:

Задача 2

Дан правильный n-угольник. Построить правильный $2n$-угольник.

Решение

Пусть $A_1A_2...A_n$ — данный правильный n-угольник. Опишем около него окружность. Для этого построим биссектрисы углов A_1 и A_2 и обозначим буквой O точку их пересечения. Затем проведём окружность с центром O радиуса OA_1 (см. рис. 307).

Для решения задачи достаточно разделить дуги A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 пополам и каждую из точек деления B_1, B_2, ..., B_n соединить отрезками с концами соответствующей дуги (рис. 310, на этом рисунке $n = 6$). Для построения точек B_1, B_2, ..., B_n можно воспользоваться серединными перпендикулярами к сторонам данного n-угольника. На рисунке 310 таким способом построен правильный двенадцатиугольник $A_1B_1A_2B_2...A_6B_6$.

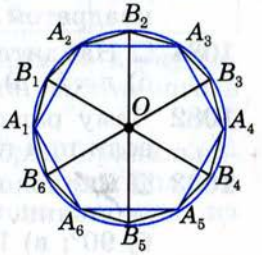


Рис. 310

Применяя указанный способ, можно с помощью циркуля и линейки построить целый ряд правильных многоугольников, если построен один из них. Например, построив правильный четырёхугольник, т. е. квадрат, и пользуясь результатом задачи 2, можно построить правильный восьмиугольник, затем правильный шестнадцатиугольник и вообще правильный 2^k-угольник, где k — любое целое число, большее двух.

Замечание

Рассмотренные примеры показывают, что многие правильные многоугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Оказывается, однако, что не все правильные многоугольники допускают такое построение. Доказано, например, что правильный семиугольник не может быть построен при помощи циркуля и линейки. Любопытно, что с помощью этих инструментов можно построить правильный семнадцатиугольник.

Задачи

1078 Верно ли утверждение: а) любой правильный многоугольник является выпуклым; б) любой выпуклый многоугольник является правильным? Ответ обоснуйте.

1079 Какие из следующих утверждений верны: а) многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны; б) треугольник является правильным, если все его углы равны; в) любой равносторонний треугольник является правильным; г) любой четырёхугольник с равными сторонами является правильным? Ответ обоснуйте.

1080 Докажите, что любой правильный четырёхугольник является квадратом.

1081 ☐ Найдите углы правильного n-угольника, если: а) $n=3$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=10$; д) $n=18$.

1082 Чему равна сумма внешних углов правильного n-угольника, если при каждой вершине взято по одному внешнему углу?

1083 ☐ Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен: а) 60°; б) 90°; в) 135°; г) 150°?

1084 ☐ Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если дуга описанной окружности, которую стягивает его сторона, равна: а) 60°; б) 30°; в) 90°; г) 36°; д) 18°; е) 72°?

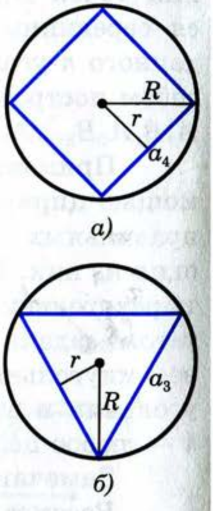


Рис. 311

1085 Докажите, что серединные перпендикуляры к любым двум сторонам правильного многоугольника либо пересекаются, либо совпадают.

1086 Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы любых двух углов правильного многоугольника, либо пересекаются, либо совпадают.

1087 ☐ На рисунке 311, *а* изображён квадрат, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_4 — сторона квадрата, P — периметр квадрата, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

N	R	r	a_4	P	S
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

1088 На рисунке 311, *б* изображён правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_3 — сторона треугольника, P — периметр треугольника, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

N	R	r	a_3	P	S
1	3				
2					10
3		2			
4			5		
5				6	

1089 Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.

1090 Сечение головки газового вентиля имеет форму правильного треугольника, сторона которого равна 3 см. Каким должен быть минимальный диаметр круглого железного стержня, из которого изготовляют вентиль?

1091 Поперечное сечение деревянного бруска является квадратом со стороной 6 см. Найдите наибольший диаметр круглого стержня, который можно выточить из этого бруска.

1092 Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см.

1093 Около правильного треугольника описана окружность радиуса R. Докажите, что $R = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

1094 Найдите площадь S правильного n-угольника, если: а) $n = 4$, $R = 3\sqrt{2}$ см; б) $n = 3$, $P = 24$ см; в) $n = 6$, $r = 9$ см; г) $n = 8$, $r = 5\sqrt{3}$ см.

1095 Расстояние между параллельными гранями шестигранной головки болта, основание которого имеет форму правильного шестиугольника, равно 1,5 см. Найдите площадь основания.

1096 Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны друг другу. Найдите отношения площадей этих многоугольников.

1097 Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников — вписанного в окружность и описанного около неё.

1098 Выразите сторону, периметр и площадь правильного треугольника: а) через радиус вписанной окружности; б) через радиус описанной окружности.

1099 Правильный восьмиугольник $A_1A_2...A_8$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что четырёхугольник $A_3A_4A_7A_8$ является прямоугольником, и выразите его площадь через R.

1100 ☐ С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите: а) правильный шестиугольник; б) правильный треугольник; в) квадрат; г) правильный восьмиугольник.

§2 Длина окружности и площадь круга

114 Длина окружности

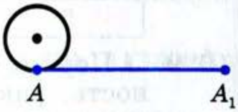


Рис. 312

Чтобы получить наглядное представление о длине окружности, представим себе, что окружность сделана из тонкой нерастяжимой нити. Если мы разрежем нить в какой-нибудь точке A и распрямим её, то получим отрезок AA_1, длина которого и есть длина окружности (рис. 312).

Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближённым значением длины окружности. Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближённое значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон всё ближе и ближе «прилегает» к окружности (рис. 313). Точное значение длины окружности — это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.


Рис. 313

Выведем формулу, выражающую длину окружности через её радиус. Пусть C и C' — длины окружностей радиусов R и R'. Впишем в каждую из них правильный n-угольник и обозначим через P_n и P'_n их периметры, а через a_n и a'_n — их стороны. Используя формулу (2) из § 1, получаем:

$$P = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (1)$$

Это равенство справедливо при любом значении n. Будем теперь неограниченно увеличивать число n. Так как $P_n \to C$, $P'_n \to C'$ при $n \to \infty$, то предел отношения $\frac{P_n}{P'_n}$ равен $\frac{C}{C'}$. С другой стороны, в силу равенства (1) этот предел равен $\frac{2R}{2R'}$. Таким образом, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$. Из этого равенства следует, что $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$, т. е. **отношение длины окружности к её диаметру есть одно и то же число для всех окружностей.** Это число принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R:

$$C = 2\pi R.$$

Доказано, что π является бесконечной непериодической десятичной дробью, т. е. иррациональным числом. Рациональное число $\frac{22}{7}$ является приближённым значением числа π с точностью до 0,002. Это приближённое значение было найдено ещё в III в. до н. э. великим греческим учёным Архимедом. При решении задач обычно пользуются приближённым значением π с точностью до 0,01: $\pi = 3{,}14$.

Выведем теперь формулу для вычисления длины l дуги окружности с градусной мерой α. Так как длина всей окружности равна $2\pi R$, то длина дуги в $1°$ равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Поэтому длина l выражается формулой

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha.$$

115 Площадь круга

Напомним, что **кругом** называется часть плоскости, ограниченная окружностью. Круг радиуса R с центром O содержит точку O и все точки плоскости, находящиеся от точки O на расстоянии, не большем R.

Выведем формулу для вычисления площади круга радиуса R. Для этого рассмотрим правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$, вписанный в окружность, ограничивающую круг (рис. 314). Очевидно, площадь S данного круга больше площади S_n многоугольника $A_1A_2...A_n$, так как этот многоугольник целиком содержится в данном круге. С другой стороны, площадь S_n' круга, вписанного в многоугольник, меньше S_n, так как этот круг целиком содержится в многоугольнике. Итак,

$$S_n' < S_n < S. \qquad (2)$$

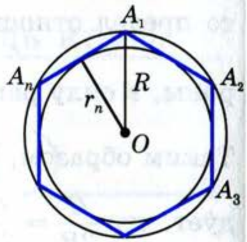


Рис. 314

Будем теперь неограниченно увеличивать число сторон многоугольника. По формуле (3) § 1 имеем $r_n = R\cos\frac{180°}{n}$, где r_n — радиус вписанной в многоугольник окружности. При $n \to \infty$ $\cos\frac{180°}{n} \to 1$, поэтому $r_n \to R$. Иными словами, при неограниченном увеличении числа сторон многоугольника вписанная в него окружность «стремится» к описанной окружности, поэтому $S_n' \to S$ при $n \to \infty$. Отсюда и из неравенств (2) следует, что $S_n \to S$ при $n \to \infty$.

По формуле (1) § 1 $S_n = \frac{1}{2}P_nr_n$, где P_n — периметр многоугольника $A_1A_2...A_n$. Учитывая, что $r_n \to R$, $P_n \to 2\pi R$, $S_n \to S$ при $n \to \infty$, получаем $S = \frac{1}{2}\,2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Итак, для вычисления площади S круга радиуса R мы получили формулу

$$S = \pi R^2.$$

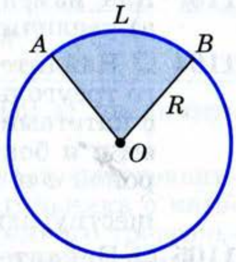
Замечание

В течение веков усилия многих математиков были направлены на решение задачи, получившей название **задача о квадратуре круга:** построить при помощи циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

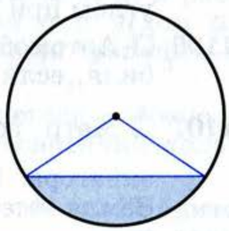
Только в конце XIX века было доказано, что такое построение невозможно.

116 Площадь кругового сектора

Круговым сектором или просто сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора.** На рисунке 315, *а* изображены два сектора с дугами ALB и AMB. Первый из этих секторов закрашен.



а)



б)

Рис. 315

Выведем формулу для вычисления площади S кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α.

Так как площадь всего круга равна πR^2, то площадь кругового сектора, ограниченного дугой в $1°$, равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Поэтому площадь S выражается формулой

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$

Круговым сегментом или просто сегментом называется часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, соединяющей концы этой дуги (рис. 315, *б*).

Если градусная мера дуги меньше $180°$, то площадь сегмента можно найти, вычитая из площади сектора площадь равнобедренного треугольника, сторонами которого являются два радиуса и хорда сегмента.

Задачи

1101 Перечертите таблицу и, используя формулу длины C окружности радиуса R, заполните пустые клетки таблицы. Воспользуйтесь значением $\pi = 3{,}14$.

C			82	18π		6,28			$2\sqrt{2}$
R	4	3			0,7		101,5	$2\frac{1}{3}$	

1102 Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в три раза; б) уменьшить в два раза; в) увеличить в k раз; г) уменьшить в k раз?

1103 Как изменится радиус окружности, если длину окружности: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

1104 Найдите длину окружности, описанной около: а) правильного треугольника со стороной a; б) прямоугольного треугольника с катетами a и b; в) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b; г) прямоугольника с меньшей стороной a и острым углом α между диагоналями; д) правильного шестиугольника, площадь которого равна $24\sqrt{3}$ см².

1105 Найдите длину окружности, вписанной: а) в квадрат со стороной a; б) в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c; в) в прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α; г) в равнобедренный треугольник с углом при основании α и высотой h, проведённой к основанию.

1106 Автомобиль прошёл 989 м. Найдите диаметр колеса автомобиля, если известно, что оно сделало 500 оборотов.

1107 Метр составляет приближённо $\frac{1}{40\,000\,000}$ часть земного экватора. Найдите диаметр Земли в километрах, считая, что Земля имеет форму шара.

1108 Вычислите длину круговой орбиты искусственного спутника Земли, если спутник вращается на расстоянии 320 км от поверхности Земли, а радиус Земли равен 6370 км.

1109 Найдите длину дуги окружности радиуса 6 см, если её градусная мера равна: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

1110 Расстояние между серединами зубьев зубчатого колеса, измеренное по дуге окружности, равно 47,1 мм. Диаметр колеса равен 450 мм. Сколько зубьев имеет колесо?

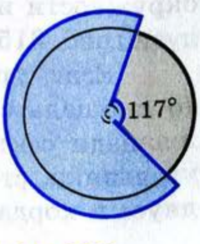


Рис. 316

1111 Шлифовальный камень, имеющий форму диска, находится в защитном кожухе (рис. 316). Диаметр камня равен 58 см, дуга незащищённой его части равна 117°. Найдите длину дуги незащищённой части камня.

1112 Найдите длину маятника стенных часов, если угол его колебания составляет 38°, а длина дуги, которую описывает конец маятника, равна 24 см.

1113 Радиус закругления пути железнодорожного полотна равен 5 км, а длина дуги закругления — 400 м. Какова градусная мера дуги закругления?

1114 Перечертите таблицу и, используя формулу для площади S круга радиуса R, заполните пустые клетки. Воспользуйтесь значением $\pi = 3{,}14$.

S			9		49π			6,25
R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3	$\sqrt{3}$	

1115 Как изменится площадь круга, если его радиус: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

1116 Найдите площадь круга, описанного около: а) прямоугольника со сторонами a и b; б) прямоугольного треугольника с катетом a и противолежащим углом α; в) равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, проведённой к основанию.

1117 Найдите площадь круга, вписанного: а) в равносторонний треугольник со стороной a; б) в прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α; в) в равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α, противолежащим основанию; г) в равнобедренную трапецию с бóльшим основанием a и острым углом α.

1118 Диаметр основания царь-колокола, находящегося в Московском Кремле, равен 6,6 м. Найдите площадь основания колокола.

1119 Длина окружности цирковой арены равна 41 м. Найдите диаметр и площадь арены.

1120 Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами R_1 и R_2, $R_1 < R_2$. Вычислите площадь кольца, если $R_1 = 1{,}5$ см, $R_2 = 2{,}5$ см.

1121 Какой толщины слой нужно снять с круглой медной проволоки, имеющей площадь сечения 314 мм^2, чтобы она проходила сквозь отверстие диаметром 18,5 мм?

1122 Вокруг круглой клумбы, радиус которой равен 3 м, проложена дорожка шириной 1 м. Сколько нужно песка, чтобы посыпать дорожку, если на 1 м^2 дорожки требуется 0,8 дм^3 песка?

1123 Из круга радиуса r вырезан квадрат, вписанный в окружность, которая ограничивает круг. Найдите площадь оставшейся части круга.

1124 На мишени имеются четыре окружности с общим центром, радиусы которых равны 1, 2, 3 и 4. Найдите площадь наименьшего круга, а также площадь каждого из трёх колец мишени.

1125 На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три полукруга. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

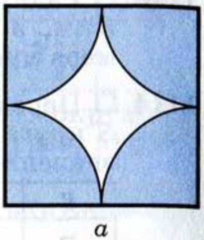


Рис. 317

1126 Из круга, радиус которого 10 см, вырезан сектор с дугой в 60°. Найдите площадь оставшейся части круга.

1127 Площадь сектора с центральным углом 72° равна S. Найдите радиус сектора.

1128 Сторона квадрата, изображённого на рисунке 317, равна a. Вычислите площадь закрашенной фигуры.

Вопросы для повторения к главе XII

1 Какой многоугольник называется правильным? Приведите примеры правильных многоугольников.

2 Выведите формулу для вычисления угла правильного n-угольника.

3 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

4 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

5 Выведите формулу для вычисления площади правильного многоугольника через его периметр и радиус вписанной окружности.

6 Выведите формулы для вычисления стороны правильного n-угольника и радиуса вписанной в него окружности через радиус описанной окружности.

7 Как выражаются стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника через радиус описанной окружности?

8 Выведите формулу для вычисления длины окружности.

9 Объясните, какое число обозначается буквой π и чему равно его приближённое значение.

10 Выведите формулу для вычисления длины дуги окружности.

11 Выведите формулу для вычисления площади круга.

12 Что такое круговой сектор? Выведите формулу для вычисления площади кругового сектора.

13 Что такое круговой сегмент? Объясните, как можно вычислить его площадь.

Дополнительные задачи

1129 □ Сколько сторон имеет правильный многоугольник, один из внешних углов которого равен: а) 18°; б) 40°; в) 72°; г) 60°?

1130 □ На стороне правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 3 дм, построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

1131 □ Найдите периметр правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, если $A_1A_4 = 2{,}24$ см.

1132 □ Найдите отношение периметров правильного треугольника и квадрата: а) вписанных в одну и ту же окружность; б) описанных около одной и той же окружности.

1133 Диагонали A_1A_6 и A_2A_9 правильного двенадцатиугольника пересекаются в точке B (рис. 318). Докажите, что: а) треугольники A_1A_2B и A_6A_9B равносторонние; б) $A_1A_6 = 2r$, где r — радиус вписанной в двенадцатиугольник окружности.

1134 Диагонали A_1A_4 и A_2A_7 правильного десятиугольника $A_1A_2...A_{10}$, вписанного в окружность радиуса R, пересекаются в точке B (рис. 319). Докажите, что: а) $A_2A_7 = 2R$; б) $\triangle A_1A_2B$ и $\triangle BA_4O$ — подобные равнобедренные треугольники; в) $A_1A_4 - A_1A_2 = R$.

1135 □ В круг, площадь которого равна 36π см^2, вписан правильный шестиугольник. Найдите сторону этого шестиугольника и его площадь.

1136 □ Квадрат $A_1A_2A_3A_4$ вписан в окружность радиуса R (рис. 320). На его сторонах отмечены восемь точек так, что $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = A_1C_1 = A_2C_2 = A_3C_3 = A_4C_4 = R$. Докажите, что восьмиугольник $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ правильный, и выразите площадь этого восьмиугольника через радиус R.

1137 □ За два оборота по круговой орбите вокруг Земли космический корабль проделал путь 84 152 км. На какой высоте над поверхностью Земли находится корабль, если радиус Земли равен 6370 км?

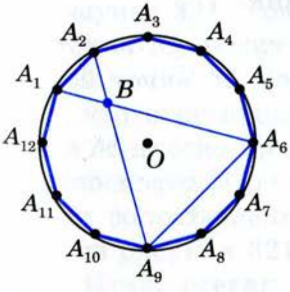


Рис. 318

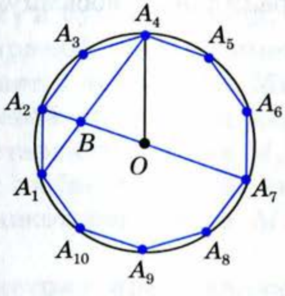


Рис. 319

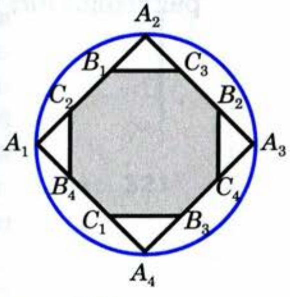


Рис. 320

1138 Найдите длину окружности, вписанной в ромб, если:
а) диагонали ромба равны 6 см и 8 см;
б) сторона ромба равна a и острый угол равен α.

1139 Лесной участок имеет форму круга. Чтобы обойти этот участок по опушке, идя со скоростью 4 км/ч, нужно затратить на 45 мин больше, чем для того, чтобы пересечь его по диаметру. Найдите длину опушки данного участка.

1140 В правильный многоугольник вписана окружность. Докажите, что отношение площади круга, ограниченного этой окружностью, к площади многоугольника равно отношению длины окружности к периметру многоугольника.

1141 Фигура ограничена бо́льшими дугами двух окружностей, имеющих общую хорду, длина которой равна 6 см. Для одной окружности эта хорда является стороной вписанного квадрата, для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите сумму длин этих дуг.

1142 Основания трапеции, около которой можно описать окружность, равны 4 см и 14 см, а одна из боковых сторон равна 13 см. Найдите длину описанной окружности.

1143 Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разделяет треугольник на два подобных треугольника (см. задачу 2, п. 65). Докажите, что отношение длин окружностей, вписанных в эти треугольники, равно коэффициенту подобия этих треугольников.

Задачи на построение

1144* Постройте правильный восьмиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

1145* Даны два круга. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей данных кругов.

1146 Около данной окружности опишите: а) правильный треугольник; б) правильный шестиугольник.

1147 Около данной окружности опишите: а) правильный четырёхугольник; б) правильный восьмиугольник.

Глава XIII

Движения

Слово «движение» вам знакомо. Но в геометрии оно имеет особый смысл. Какой именно, об этом вы узнаете из данной главы. А пока отметим, что с помощью движений удаётся находить красивые решения многих геометрических задач. Примеры таких решений вы найдёте в этой главе.

§ 1 Понятие движения

117 Отображение плоскости на себя

Представим себе, что каждой точке плоскости сопоставляется (ставится в соответствие) какая-то точка этой же плоскости, причём любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой точке. Тогда говорят, что дано **отображение плоскости на себя**.

Фактически мы уже встречались с отображениями плоскости на себя — вспомним осевую симметрию (см. п. 48). Она даёт нам пример такого отображения. В самом деле, пусть a — ось симметрии (рис. 321). Возьмём произвольную точку M, не лежащую на прямой a, и построим симметричную ей точку M_1 относительно прямой a. Для этого нужно провести перпендикуляр MP к прямой a и отложить на прямой MP отрезок PM_1, равный отрезку MP, так, как показано на рисунке 321. Точка M_1 и будет искомой. Если же точка M лежит на прямой a, то симметричная ей точка M_1 совпадает с точкой M. Мы видим, что с помощью осевой симметрии каждой точке M плоскости сопоставляется точка M_1 этой же плоскости. При этом любая точка M_1 оказывается сопоставленной некоторой точке M. Это ясно из рисунка 321.

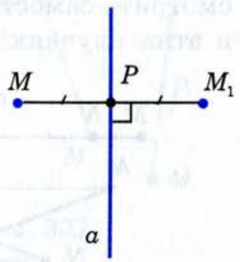


Рис. 321

Итак, **осевая симметрия представляет собой отображение плоскости на себя.**

Рассмотрим теперь центральную симметрию плоскости (см. п. 48). Пусть O — центр симметрии. Каждой точке M плоскости сопоставляется точка M_1, симметричная точке M относительно точки O (рис. 322). Попытайтесь самостоятельно убедиться в том, что центральная симметрия плоскости также представляет собой отображение плоскости на себя.

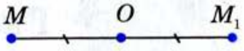


Рис. 322

118 Понятие движения

Осевая симметрия обладает следующим важным свойством — **это отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками.**

Поясним, что это значит. Пусть M и N — какие-либо точки, а M_1 и N_1 — симметричные им точки относительно прямой a (рис. 323). Из точек N и N_1 проведём перпендикуляры NP и N_1P_1 к прямой MM_1. Прямоугольные треугольники MNP и $M_1N_1P_1$ равны по двум катетам: $MP = M_1P_1$ и $NP = N_1P_1$ (объясните, почему эти катеты равны). Поэтому гипотенузы MN и M_1N_1 также равны. Следовательно, **расстояние между точками M и N равно расстоянию между симметричными им точками M_1 и N_1.** Другие случаи расположения точек M, N и M_1, N_1 рассмотрите самостоятельно и убедитесь в том, что и в этих случаях $MN = M_1N_1$ (рис. 324). Таким об-

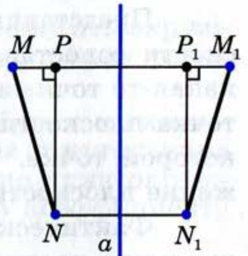


Рис. 323

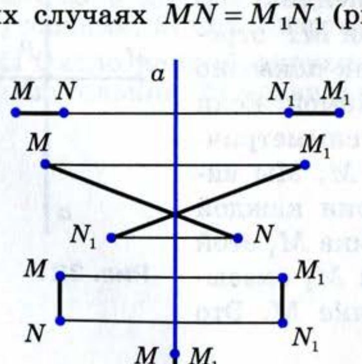


Рис. 324

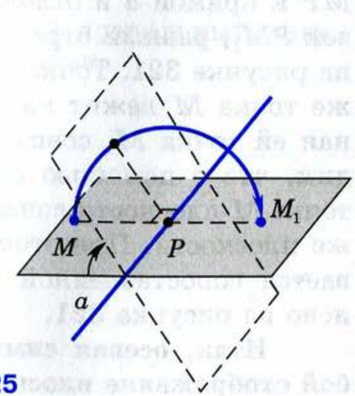


Рис. 325

разом, осевая симметрия является отображением, которое сохраняет расстояния между точками. Любое отображение, обладающее этим свойством, называется движением (или перемещением).

Итак, движение плоскости — это отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния.

Почему отображение, сохраняющее расстояния, называют движением (или перемещением), можно пояснить на примере осевой симметрии. Её можно представить как поворот плоскости в пространстве на $180°$ вокруг оси a. На рисунке 325 показано, каким образом происходит такой поворот.

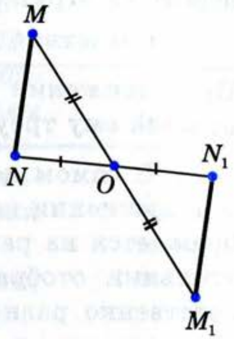


Рис. 326

Отметим, что **центральная симметрия плоскости также является движением** (пользуясь рисунком 326, убедитесь в этом самостоятельно).

Докажем следующую теорему:

Теорема

При движении отрезок отображается на отрезок.

Доказательство

Пусть при заданном движении плоскости концы M и N отрезка MN отображаются в точки M_1 и N_1 (рис. 327). Докажем, что весь отрезок MN отображается на отрезок M_1N_1. Пусть P — произвольная точка отрезка MN, P_1 — точка, в которую отображается точка P. Тогда $MP + PN = MN$. Так как при движении расстояния сохраняются, то

$$M_1N_1 = MN,\ M_1P_1 = MP \text{ и } N_1P_1 = NP. \qquad (1)$$

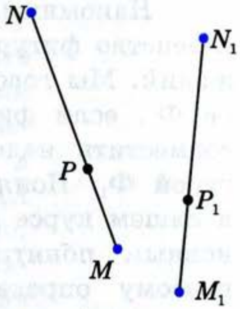


Рис. 327

Из равенств (1) получаем, что $M_1P_1 + P_1N_1 = M_1N_1$, и, значит, точка P_1 лежит на отрезке M_1N_1 (если предположить, что это не так, то будет выполняться неравенство $M_1P_1 + P_1N_1 > M_1N_1$). Итак, точки отрезка MN отображаются в точки отрезка M_1N_1.

Нужно ещё доказать, что в каждую точку P_1 отрезка M_1N_1 отображается какая-нибудь точка P отрезка MN. Докажем это. Пусть P_1 — произвольная точка отрезка M_1N_1, и точка P при заданном движении отображается в точку P_1. Из соотношений (1) и равенства $M_1N_1 = M_1P_1 + P_1N_1$ следует, что $MP + PN = MN$, и, значит, точка P лежит на отрезке MN. **Теорема доказана.**

Следствие

При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

В самом деле, в силу доказанной теоремы при движении каждая сторона треугольника отображается на равный ей отрезок, поэтому и треугольник отображается на треугольник с соответственно равными сторонами, т. е. на равный треугольник.

Пользуясь доказанной теоремой, нетрудно убедиться в том, что при движении прямая отображается на прямую, луч — на луч, а угол — на равный ему угол.

119* Наложения и движения

Напомним, что в нашем курсе геометрии равенство фигур определяется с помощью наложений. Мы говорим, что фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, если фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$. Понятие наложения в нашем курсе относится к основным понятиям геометрии, поэтому определение наложения не даётся. Под наложением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ мы понимаем некоторое отображение фигуры Ф на фигуру $Ф_1$. Более того, мы считаем, что при этом не только точки фигуры Ф, но и любая точка плоскости отображается в определённую точ-

ку плоскости, т. е. **наложение — это отображение плоскости на себя.**

Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (см. приложение 1, аксиомы 7—13). Эти аксиомы позволяют доказать все те свойства наложений, которые мы себе представляем наглядно и которыми пользуемся при доказательстве теорем и решении задач. Докажем, например, что **при наложении различные точки отображаются в различные точки.**

В самом деле, предположим, что это не так, т. е. при некотором наложении какие-то две точки A и B отображаются в одну и ту же точку C. Тогда фигура Φ_1, состоящая из точек A и B, равна фигуре Φ_2, состоящей из одной точки C. Отсюда следует, что $\Phi_2 = \Phi_1$ (аксиома 12), т. е. при некотором наложении фигура Φ_2 отображается в фигуру Φ_1. Но это невозможно, так как наложение — это отображение, а при любом отображении точке C ставится в соответствие только одна точка плоскости.

Из доказанного утверждения следует, что при наложении отрезок отображается на равный ему отрезок. Действительно, пусть при наложении концы A и B отрезка AB отображаются в точки A_1 и B_1. Тогда отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1 (аксиома 7), и, следовательно, отрезок AB равен отрезку A_1B_1. Так как равные отрезки имеют равные длины, то наложение является отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния, т. е. **любое наложение является движением плоскости.**

Докажем, что верно и обратное утверждение.

Теорема

Любое движение является наложением.

Доказательство

Рассмотрим произвольное движение (обозначим его буквой g) и докажем, что оно является наложением. Возьмём какой-нибудь треугольник ABC. При движении g он отображается на равный ему треугольник $A_1B_1C_1$. По определению равных треугольников существует наложение f, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1.

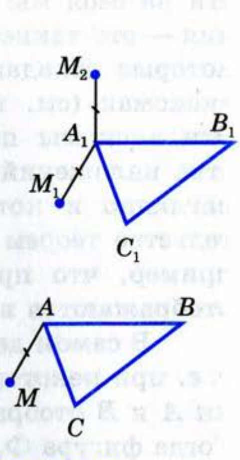


Рис. 328

Докажем, что движение g совпадает с наложением f. Предположим, что это не так. Тогда на плоскости найдётся хотя бы одна такая точка M, которая при движении g отображается в точку M_1, а при наложении f — в другую точку M_2. Так как при отображениях f и g сохраняются расстояния, то $AM = A_1M_1$, $AM = A_1M_2$, поэтому $A_1M_1 = A_1M_2$, т. е. точка A_1 равноудалена от точек M_1 и M_2 (рис. 328). Аналогично доказывается, что точки B_1 и C_1 равноудалены от точек M_1 и M_2. Отсюда следует, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Но это невозможно, так как вершины треугольника $A_1B_1C_1$ не лежат на одной прямой. Таким образом, отображения f и g совпадают, т. е. движение g является наложением. **Теорема доказана.**

Следствие

При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.

Задачи

1148 Докажите, что при осевой симметрии плоскости:
а) прямая, параллельная оси симметрии, отображается на прямую, параллельную оси симметрии;
б) прямая, перпендикулярная к оси симметрии, отображается на себя.

1149 Докажите, что при центральной симметрии плоскости:
а) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую;
б) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

1150 Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

Решение

Пусть при данном движении угол AOB отображается на угол $A_1O_1B_1$, причём точки A, O, B отображаются соответственно в точки A_1, O_1, B_1. Так как при движении сохраняются расстояния, то $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Если угол AOB неразвёрнутый, то треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ равны по трём сторонам, и, следовательно, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый, то и угол $A_1O_1B_1$ развёрнутый (докажите это), поэтому эти углы равны.

1151 Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

1152 Докажите, что при движении: а) параллелограмм отображается на параллелограмм; б) трапеция отображается на трапецию; в) ромб отображается на ромб; г) прямоугольник отображается на прямоугольник, а квадрат — на квадрат.

1153 Докажите, что при движении окружность отображается на окружность того же радиуса.

1154 Докажите, что отображение плоскости, при котором каждая точка отображается на себя, является наложением.

1155 ABC и $A_1B_1C_1$ — произвольные треугольники. Докажите, что существует не более одного движения, при котором точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1, C_1.

1156 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Докажите, что существует движение, при котором точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1 и C_1, и притом только одно.

Решение

По условию задачи треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, существует наложение, т. е. движение, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1. Это движение является единственным движением, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1 (задача **1155**).

1157 Докажите, что два параллелограмма равны, если смежные стороны и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны смежным сторонам и углу между ними другого параллелограмма.

1158 Даны две прямые a и b. Постройте прямую, на которую отображается прямая b при осевой симметрии с осью a.

1159 Даны прямая a и четырёхугольник $ABCD$. Постройте фигуру F, на которую отображается данный четырёхугольник при осевой симметрии с осью a. Что представляет собой фигура F?

1160 Даны точка O и прямая b. Постройте прямую, на которую отображается прямая b при центральной симметрии с центром O.

1161 Даны точка O и треугольник ABC. Постройте фигуру F, на которую отображается треугольник ABC при центральной симметрии с центром O. Что представляет собой фигура F?

§2 Параллельный перенос и поворот

120 Параллельный перенос

Пусть $\vec{a}$ — данный вектор. **Параллельным переносом** на вектор $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ равен вектору $\vec{a}$ (рис. 329).

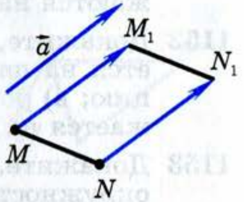


Рис. 329

Параллельный перенос является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния. Докажем это. Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точки M и N отображаются в точки M_1 и N_1 (см. рис. 329). Так как $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NN_1} = \vec{a}$, то $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$. Отсюда следует, что $MM_1 \parallel NN_1$ и $MM_1 = NN_1$, поэтому четырёхугольник MM_1N_1N — параллелограмм. Следовательно, $MN = M_1N_1$, т. е. расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M_1 и N_1 (случаи, когда точки M и N расположены на прямой, параллельной вектору $\vec{a}$, рассмотрите самостоятельно). Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движение. Наглядно это движение можно представить себе как сдвиг всей плоскости в направлении данного вектора $\vec{a}$ на его длину.

121 Поворот

Отметим на плоскости точку O (центр поворота) и зададим угол α (угол поворота). **Поворотом плоскости** вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что $OM = OM_1$ и угол MOM_1 равен α (рис. 330). При этом точка O остаётся на месте, т. е. отображается сама в себя, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении — по часовой стрелке или против часовой стрелки. На рисунке 330 изображён поворот против часовой стрелки.

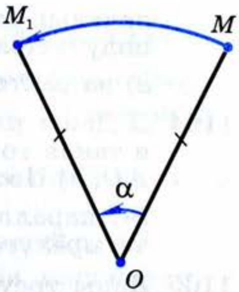


Рис. 330

Поворот является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния.

Докажем это. Пусть O — центр поворота, α — угол поворота против часовой стрелки (случай поворота по часовой стрелке рассматривается аналогично). Допустим, что при этом повороте точки M и N отображаются в точки M_1 и N_1 (рис. 331). Треугольники OMN и OM_1N_1 равны по двум сторонам и углу между ними: $OM = OM_1$, $ON = ON_1$ и $\angle MON = \angle M_1ON_1$ (для случая, изображённого на рисунке 331, каждый из этих углов равен сумме угла α и угла M_1ON). Из равенства этих треугольников следует, что $MN = M_1N_1$, т. е. расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M_1 и N_1 (случай, когда точки O, M и N расположены на одной прямой, рассмотрите самостоятельно). Итак, поворот сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движение. Это движение можно представить себе как поворот всей плоскости вокруг данной точки O на данный угол α.

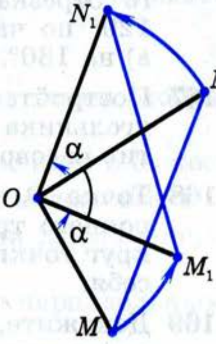


Рис. 331

Задачи

1162 Начертите отрезок AB и вектор $\overrightarrow{MM_1}$. Постройте отрезок A_1B_1, который получается из отрезка AB параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{MM_1}$.

1163 □ Начертите треугольник ABC, вектор $\overrightarrow{MM_1}$, который не параллелен ни одной из сторон треугольника, и вектор $\vec{a}$, параллельный стороне AC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, который получается из треугольника ABC параллельным переносом: а) на вектор $\overrightarrow{MM_1}$; б) на вектор $\vec{a}$.

1164 Даны равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и такая точка D на прямой AC, что точка C лежит на отрезке AD. а) Постройте отрезок B_1D, который получается из отрезка BC параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{CD}$. б) Докажите, что четырёхугольник ABB_1D — равнобедренная трапеция.

1165 Даны треугольник, трапеция и окружность. Постройте фигуры, которые получаются из этих фигур параллельным переносом на данный вектор $\vec{a}$.

1166 Постройте отрезок A_1B_1, который получается из данного отрезка AB поворотом вокруг данного центра O: а) на $120°$ по часовой стрелке; б) на $75°$ против часовой стрелки; в) на $180°$.

1167 Постройте треугольник, который получается из данного треугольника ABC поворотом вокруг точки A на угол $150°$ против часовой стрелки.

1168 Точка D является точкой пересечения биссектрис равностороннего треугольника ABC. Докажите, что при повороте вокруг точки D на угол $120°$ треугольник ABC отображается на себя.

1169 Докажите, что при повороте квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на угол $90°$ квадрат отображается на себя.

1170 Постройте окружность, которая получается из данной окружности с центром C поворотом вокруг точки O на угол $60°$ против часовой стрелки, если: а) точки O и C не совпадают; б) точки O и C совпадают.

1171 Постройте прямую a_1, которая получается из данной прямой a поворотом вокруг точки O на угол $60°$ по часовой стрелке, если прямая a: а) не проходит через точку O; б) проходит через точку O.

Решение

а) Построим окружность с центром O, которая касается прямой a (объясните, как это сделать). Пусть M — точка касания. При повороте вокруг точки O эта окружность отображается на себя, а касательная a отображается на некоторую касательную a_1 (объясните почему). Для построения прямой a_1 построим сначала точку M_1, в которую отображается точка M при повороте вокруг точки O на угол $60°$ по часовой стрелке, а затем проведём касательную a_1 к окружности в точке M_1.

Вопросы для повторения к главе XIII

1 Объясните, что такое отображение плоскости на себя.

2 Какое отображение плоскости называется: а) осевой симметрией; б) центральной симметрией?

3 Докажите, что осевая симметрия является отображением плоскости на себя.

4 Что такое движение (или перемещение) плоскости?

5 Докажите, что осевая симметрия является движением.

6 Является ли центральная симметрия движением?

7 Докажите, что при движении отрезок отображается на отрезок.

8 Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

9 Объясните, что такое наложение.

10 Докажите, что при наложении различные точки отображаются в различные точки.

11 Докажите, что наложение является движением плоскости.

12 Докажите, что любое движение является наложением.

13 Верно ли утверждение, что при движении любая фигура отображается на равную ей фигуру?

14 Какое отображение плоскости называется параллельным переносом на данный вектор?

15 Докажите, что параллельный перенос является движением.

16 Какое отображение плоскости называется поворотом?

17 Докажите, что поворот является движением.

Дополнительные задачи

1172 При данном движении каждая из двух точек A и B отображается на себя. Докажите, что любая точка прямой AB отображается на себя.

1173 При данном движении каждая из вершин треугольника ABC отображается на себя. Докажите, что любая точка плоскости отображается на себя.

1174 Докажите, что два прямоугольника равны, если: а) смежные стороны одного прямоугольника соответственно равны смежным сторонам другого; б) сторона и диагональ одного прямоугольника соответственно равны стороне и диагонали другого.

1175 □ Даны прямая a и точки M и N, лежащие по одну сторону от неё. Докажите, что на прямой a существует единственная точка X, такая, что сумма расстояний $MX + XN$ имеет наименьшее значение.

1176 □ Даны острый угол ABC и точка D внутри него. Используя осевую симметрию, найдите на сторонах данного угла такие точки E и F, чтобы треугольник DEF имел наименьший периметр.

1177 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 являются соответственно серединами отрезков AM, BM и CM. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

Решение

Так как M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $AM = 2MA_1$. Отсюда, учитывая, что точка A_2 — середина отрезка AM, получаем $MA_1 = MA_2$, т. е. точки A_1 и A_2 симметричны относительно точки M. Аналогично точки B_1 и B_2, а также точки C_1 и C_2 симметричны относительно точки M. Рассмотрим центральную симметрию относительно точки M. При этой симметрии точки A_1, B_1, C_1 отображаются в точки A_2, B_2, C_2, поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ отображается на треугольник $A_2B_2C_2$, и, следовательно, $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

1178 На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены квадраты так, как показано на рисунке 332. Используя параллельный перенос, докажите, что отрезок, соединяющий центры этих квадратов, равен и параллелен стороне AD.

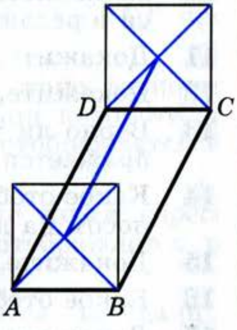


Рис. 332

1179* На стороне AB прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ABS так, как показано на рисунке 333: $CC_1 \perp AS$, $DD_1 \perp BS$. Используя параллельный перенос, докажите, что прямые SK и AB взаимно перпендикулярны.

1180 В окружность с центром O вписаны два равносторонних треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, причём вершины обозначены так, что направление обхода по дуге ABC от точки A к точке C совпадает с направлением обхода по дуге $A_1B_1C_1$ от точки A_1 к точке C_1. Используя поворот вокруг точки O, докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо проходят через точку O, либо, пересекаясь, образуют равносторонний треугольник.

1181 □ Даны две пересекающиеся прямые и точка O, не лежащая ни на одной из них. Используя центральную симметрию, постройте прямую, проходящую через точку O, так, чтобы отрезок этой прямой, отсекаемый данными прямыми, делился точкой O пополам.

Рис. 333

1182 Используя параллельный перенос, постройте трапецию по её основаниям и диагоналям.

1183 ☐ Даны параллельные прямые b и c и точка A, не лежащая ни на одной из них. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы вершины B и C лежали соответственно на прямых b и c. Сколько решений имеет задача?

Решение

Допустим, что задача решена и искомый треугольник ABC построен (рис. 334, *а*). При повороте плоскости вокруг точки A на 60° по часовой стрелке вершина B отображается в вершину C, поэтому прямая b отображается на прямую b_1, проходящую через точку C. Прямую b_1 легко построить, не пользуясь точками B и C (см. задачу **1171**). Построив прямую b_1, находим точку C, в которой прямая b_1 пересекается с прямой c. Затем, построив окружность с центром A радиуса AC, находим точку B. На рисунке 334, *а* выполнено построение.

Задача имеет два решения, одно из которых получается при повороте плоскости вокруг точки A на 60° по часовой стрелке ($\triangle ABC$ на рисунке 334, *а*), а другое — при повороте плоскости на угол 60° против часовой стрелки ($\triangle AB'C'$ на рисунке 334, *б*).

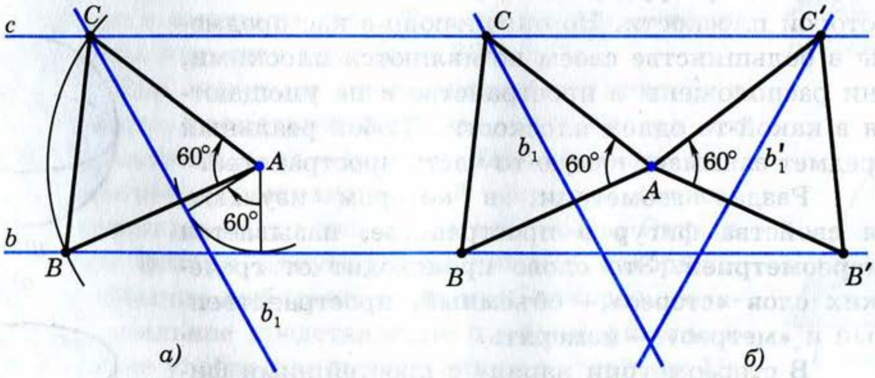


Рис. 334

Глава XIV

Начальные сведения из стереометрии

Последняя глава является введением в стереометрию — это тот раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Более основательно вы будете заниматься стереометрией в старших классах, а здесь мы познакомим вас с некоторыми пространственными фигурами и формулами для вычисления их объёмов и площадей поверхностей.

§1 Многогранники

122 Предмет стереометрии

Куб
а)

Шар
б)

Цилиндр
в)

Рис. 335

До сих пор мы занимались планиметрией — изучали свойства плоских геометрических фигур, т. е. фигур, целиком расположенных в некоторой плоскости. Но окружающие нас предметы в большинстве своём не являются плоскими, они расположены в пространстве и не умещаются в какой-то одной плоскости. Любой реальный предмет занимает какую-то часть пространства.

Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве, называется **стереометрией.** Это слово происходит от греческих слов «стерео» — объёмный, пространственный и «метрео» — измерять.

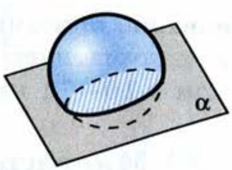
В стереометрии наряду с простейшими фигурами — точками, прямыми и плоскостями рассматриваются **геометрические тела** и их **поверхности.** Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются **многогранниками.** Одним из простейших многогранников является **куб** (рис. 335, *а*). Он составлен из шести равных квадратов. Капли жидкости в невесомости принимают форму геометрического тела, называемого **шаром** (рис. 335, *б*). Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого **цилиндром** (рис. 335, *в*).

В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отделённую от остальной части пространства поверхностью — **границей** этого тела. Так, например, граница шара есть сфера, а граница цилиндра состоит из двух кругов — оснований цилиндра и боковой поверхности.

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется **секущей плоскостью** этого тела. Фигура, которая образуется при пересечении тела с секущей плоскостью (т. е. общая часть тела и секущей плоскости), называется **сечением** тела. Так, например, сечением шара является круг (рис. 336).

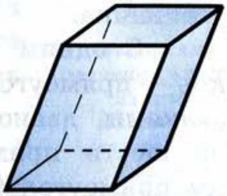
При изучении пространственных фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображениями на чертеже. Как правило, изображением пространственной фигуры служит её проекция на ту или иную плоскость. Одна и та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирают то из них, которое создаёт правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования её свойств. На рисунках 337, *а*, *б* изображены два многогранника — **параллелепипед** и **пирамида**, а на рисунке 337, *в* — **конус**. Невидимые части фигур изображены штриховыми линиями.

В этой главе мы рассмотрим некоторые виды многогранников и тела вращения — цилиндр, конус, шар, приведём формулы, по которым вычисляются их объёмы и площади поверхностей. При этом мы будем опираться в основном на наглядные представления. Более полное обос-

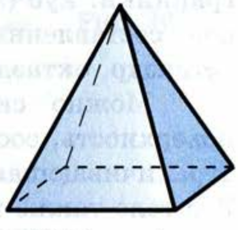


Заштрихованный круг – сечение шара плоскостью α

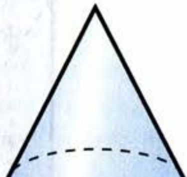
Рис. 336



а) Параллелепипед



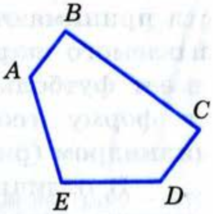
б) Пирамида



в) Конус

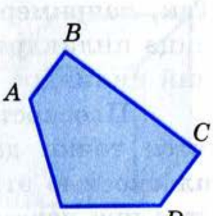
Рис. 337

нование описанных фактов и формул будет дано в систематическом курсе стереометрии, изучаемом в 10—11 классах.



Многоугольник ABCDE – фигура, составленная из отрезков

а)



Многоугольник ABCDE – часть плоскости, ограниченная линией ABCDE

б)

Рис. 338

123 Многогранник

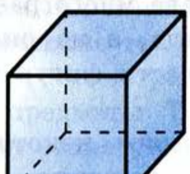
Напомним, что в планиметрии при изучении многоугольников мы рассматривали многоугольник либо как замкнутую линию, составленную из отрезков и не имеющую самопересечений (рис. 338, *а*), либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая её саму (рис. 338, *б*). При изучении многогранников мы будем пользоваться вторым толкованием многоугольника.

С одним из самых простых многогранников — прямоугольным параллелепипедом — вы знакомы давно. Этот многогранник составлен из шести прямоугольников (рис. 339, *а*). Форму прямоугольного параллелепипеда имеют коробки, комнаты и многие другие предметы. На рисунках 339, *б*, *в*, *г* изображены другие многогранники: куб (это прямоугольный параллелепипед, составленный из шести равных квадратов), **тетраэдр, октаэдр.**

Можно сказать, что **многогранник** — это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело. Это тело также называется многогранником.

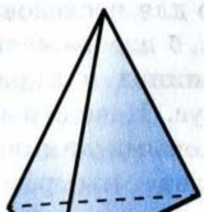
Прямоугольный параллелепипед

а)



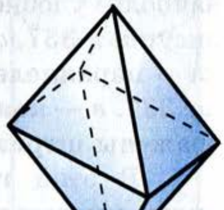
Куб

б)



Тетраэдр

в)



Октаэдр

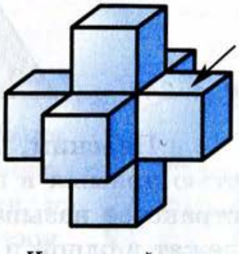
г)

Рис. 339

Тетраэдр и октаэдр (рис. 339, *в*, *г*) составлены соответственно из четырёх и восьми треугольников, что отражено в названии этих многогранников: по-гречески «тетра» — четыре, а «окто» — восемь.

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями**. При этом предполагается, что никакие две соседние грани многогранника не лежат в одной плоскости. Гранями прямоугольного параллелепипеда являются прямоугольники, а гранями тетраэдра и октаэдра — треугольники. Стороны граней называются **рёбрами**, а концы рёбер — **вершинами** многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника. На рисунке 339, *а* отрезок MN — диагональ прямоугольного параллелепипеда.

Многогранники бывают **выпуклыми** и **невыпуклыми**. Выпуклый многогранник характеризуется тем, что он расположен по одну сторону от плоскости каждой своей грани. На рисунке 339 изображены выпуклые многогранники, а на рисунке 340 — невыпуклый многогранник.



Невыпуклый многогранник, составленный из квадратов. Плоскость грани, указанной стрелкой, разрезает этот многогранник – он расположен по разные стороны от этой плоскости

Рис. 340

124 Призма

Многогранник, называемый **призмой**, можно построить следующим образом. Рассмотрим **параллельные плоскости** α и β, т. е. такие плоскости, которые не имеют общих точек. В плоскости α возьмём какой-нибудь многоугольник $A_1A_2...A_n$, а в плоскости β — равный ему многоугольник $B_1B_2...B_n$, причём так, чтобы равные стороны A_1A_2 и B_1B_2, A_2A_3 и B_2B_3, ..., A_nA_1 и B_nB_1 этих многоугольников были параллельными сторонами четырёхугольников $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ (рис. 341).

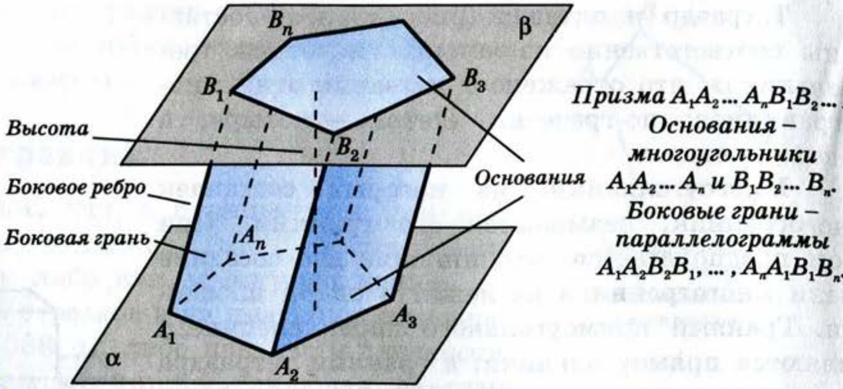


Рис. 341

Поясним, что понимается под параллельностью прямых в пространстве. Две прямые в пространстве называются **параллельными,** если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Указанные четырёхугольники являются параллелограммами. В самом деле, например, в четырёхугольнике $A_1A_2B_2B_1$ противоположные стороны A_1A_2 и B_1B_2 по построению равны и параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм.

***n*-угольной призмой** называется многогранник $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$, составленный из двух равных n-угольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ — **оснований** призмы и n параллелограммов $A_1A_2B_2B_1$, ..., $A_nA_1B_1B_n$ — **боковых граней** призмы. Отрезки A_1B_1, ..., A_nB_n называются **боковыми рёбрами** призмы. Все они равны и параллельны друг другу.

Призмы бывают прямыми и наклонными. Чтобы дать определение прямой призмы, введём понятие перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая a, пересекающая плоскость α в некоторой точке H (рис. 342), называется **перпендикулярной** к этой плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости α и проходящей через точку H. Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \perp \alpha$.

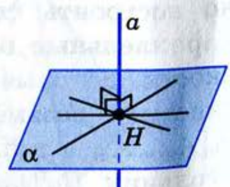
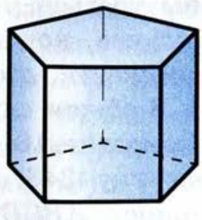


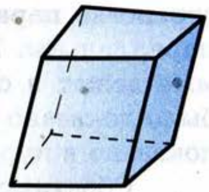
Рис. 342

Если все боковые рёбра призмы перпендикулярны к плоскостям её оснований, то призма называется **прямой** (рис. 343, *а*); в противном случае призма называется **наклонной** (рис. 343, *б*). Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной** (рис. 343, *в*).



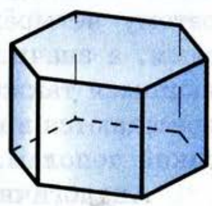
Прямая пятиугольная призма

а)



Наклонная четырёхугольная призма

б)

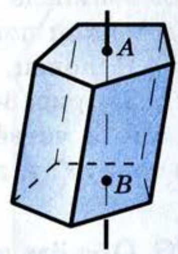


Правильная шестиугольная призма

в)

Рис. 343

Выберем произвольную точку A одного из оснований и проведём через неё прямую, перпендикулярную к плоскости другого основания и пересекающую её в точке B (рис. 344). Отрезок AB называется **высотой** призмы. В курсе стереометрии 10—11 классов доказывается, что все высоты призмы равны и параллельны друг другу.



Отрезок AB – высота призмы

Рис. 344

125 Параллелепипед

Четырёхугольная призма, основаниями которой являются параллелограммы, называется **параллелепипедом** (рис. 345). Все шесть граней параллелепипеда — параллелограммы.

Если параллелепипед **прямой**, т. е. его боковые рёбра перпендикулярны к плоскостям оснований, то боковые грани — прямоугольники. Если же и основаниями прямого параллелепипеда служат прямоугольники, то этот параллелепипед — **прямоугольный**.

Мы знаем, что диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Оказывается, что аналогичным свойством обладают диагонали параллелепипеда:

Четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Доказательство этого утверждения основано на следующем факте: **если две прямые в про-**

Параллелепипед

Рис. 345

странстве параллельны третьей прямой, то они параллельны.** В том случае, когда все три прямые лежат в одной плоскости, это утверждение было доказано в п. 28. В общем случае оно будет доказано в курсе стереометрии 10—11 классов.

Обратимся к рисунку 346, *а*, на котором изображён параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Поскольку грани $ABCD$ и ADD_1A_1 — параллелограммы, то $BC \parallel AD$, $BC = AD$, $A_1D_1 \parallel AD$, $A_1D_1 = AD$. Из этого следует, что $BC = A_1D_1$ и $BC \parallel A_1D_1$, поэтому четырёхугольник A_1D_1CB — параллелограмм, а значит, его диагонали A_1C и D_1B, являющиеся также диагоналями параллелепипеда, пересекаются в некоторой точке O и делятся этой точкой пополам.

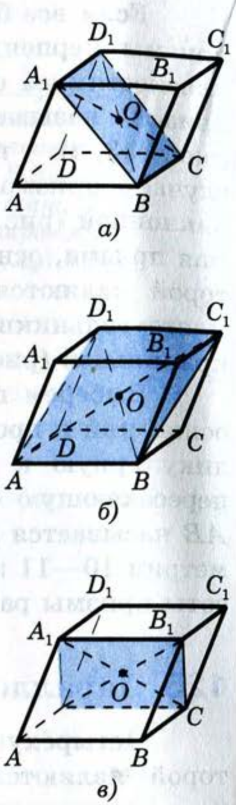


Рис. 346

Аналогично доказывается, что четырёхугольник AD_1C_1B — параллелограмм (рис. 346, *б*), и, следовательно, его диагонали AC_1 и D_1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D_1B является точка O. Таким образом, диагонали A_1C, D_1B и AC_1 параллелепипеда пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

Наконец, рассматривая четырёхугольник A_1B_1CD (рис. 346, *в*), точно так же устанавливаем, что и четвёртая диагональ DB_1 проходит через точку O и делится ею пополам.

126 Объём тела

Понятие объёма тела вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры. Как мы помним, каждый многоугольник имеет площадь, которая измеряется с помощью выбранной единицы измерения площадей. В качестве единицы измерения площадей обычно берут квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

Аналогично будем считать, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объём, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объёмов. За единицу измерения объёмов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см называется **кубическим сантиметром** и обозначается так: 1 см^3. Аналогично определяются **кубический метр** (м^3), **кубический миллиметр** (мм^3) и т. д.

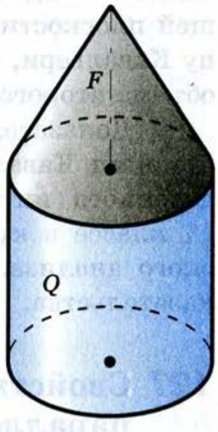
Процедура измерения объёмов аналогична процедуре измерения площадей. При выбранной единице измерения объём тела выражается положительным числом, которое показывает, сколько единиц измерения объёмов и её частей укладываются в этом теле. Ясно, что число, выражающее объём тела, зависит от выбора единицы измерения объёмов. Поэтому единица измерения объёмов указывается после этого числа.

Например, если в качестве единицы измерения объёмов взят 1 см^3, и при этом объём V некоторого тела оказался равным 2, то пишут: $V = 2$ см^3.

Если два тела равны, то каждое из них содержит столько же единиц измерения объёмов и её частей, сколько и другое тело. Таким образом,

1^0. Равные тела имеют равные объёмы.

Рассмотрим тело, составленное из нескольких тел так, что внутренние области этих тел не имеют общих точек (рис. 347). Ясно, что объём всего тела складывается из объёмов составляющих его тел. Итак,



$V = V_F + V_Q$

Рис. 347

2^0. Если тело составлено из нескольких тел, то его объём равен сумме объёмов этих тел.

Свойства 1^0 и 2^0 называются **основными свойствами объёмов**. Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков и площади многоугольников.

Для нахождения объёмов тел в ряде случаев удобно пользоваться теоремой, получившей название **принцип Кавальери**[1]. Поясним, в чём

[1] Кавальери Бонавентура (1598—1647) — итальянский математик.

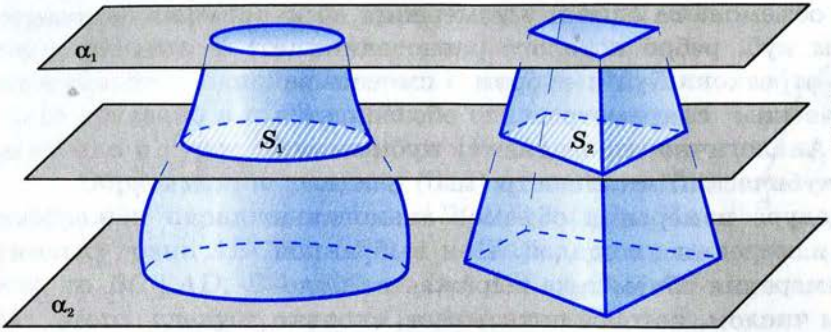


Рис. 348

состоит этот принцип. Рассмотрим два тела, заключённые между двумя параллельными плоскостями α_1 и α_2 (рис. 348). Допустим, что любая плоскость, расположенная между плоскостями α_1 и α_2 и параллельная им, пересекает оба тела так, что площадь сечения первого тела в k раз больше площади сечения второго тела, причём число k — одно и то же для любой такой секущей плоскости. В этом случае, согласно принципу Кавальери, объём первого тела в k раз больше объёма второго тела.

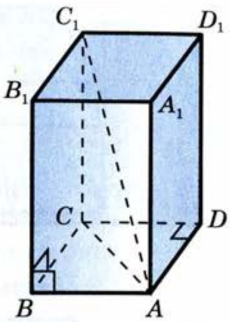
Доказательство теоремы, выражающей принцип Кавальери, основано на понятии определённого интеграла, которое будет введено в 11 классе в курсе алгебры и начал математического анализа. Мы примем эту теорему без доказательства.

127 Свойства прямоугольного параллелепипеда

Когда мы говорим о размерах комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, то обычно употребляем слова «длина», «ширина» и «высота», имея в виду длины трёх рёбер с общей вершиной. В геометрии эти три величины объединяются общим названием: **измерения** прямоугольного параллелепипеда. Так, у прямоугольного параллелепипеда, изображённого на рисунке 349, в качестве измерений можно взять длины рёбер AB, AD и AA_1.

У прямоугольника два измерения — длина и ширина. При этом, как мы знаем, **квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его измерений.**

Оказывается, что аналогичным свойством обладает и прямоугольный параллелепипед: **квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.**



Прямоугольный параллелепипед

Рис. 349

В самом деле, обратимся к рисунку 349, на котором изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и докажем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Ребро CC_1 перпендикулярно к плоскости грани $ABCD$, т. е. перпендикулярно к любой прямой, лежащей в плоскости этой грани и проходящей через точку C. Поэтому угол ACC_1 — прямой. Из прямоугольного треугольника ACC_1 по теореме Пифагора получаем: $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$.

Но AC — диагональ прямоугольника $ABCD$, поэтому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Кроме того, $CC_1 = BB_1 = AA_1$. Следовательно, $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$, что и требовалось доказать.

Остановимся ещё на одном свойстве, иллюстрирующем аналогию между прямоугольником и прямоугольным параллелепипедом. Мы знаем, что **площадь прямоугольника равна произведению его измерений.**

Оказывается, что аналогичное утверждение справедливо и для прямоугольного параллелепипеда: **объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.**

Для доказательства этого утверждения воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим сначала прямоугольный параллелепипед с измерениями a, b, 1 и куб с ребром 1, «стоящие» на плоскости α (рис. 350, a). Этот куб является еди-

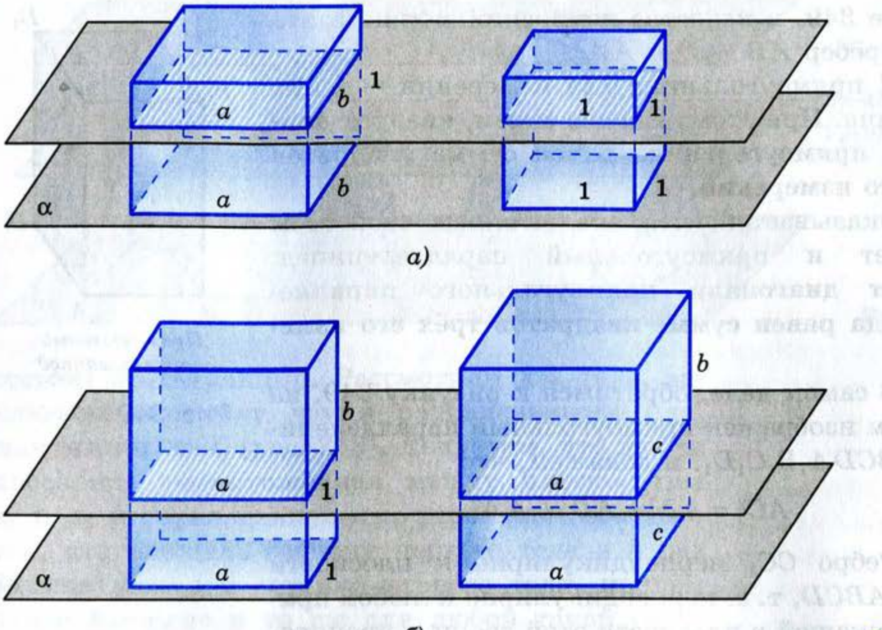


Рис. 350

ницей измерения объёмов, т. е. его объём равен 1. Любая секущая плоскость, параллельная плоскости α, даёт в качестве сечения куба квадрат площади 1, а в качестве сечения рассматриваемого параллелепипеда — прямоугольник площади ab (см. рис. 350, *а*). Следовательно, согласно принципу Кавальери, объём этого параллелепипеда в ab раз больше объёма куба, т. е. равен ab.

Рассмотрим теперь два прямоугольных параллелепипеда: один с измерениями a, b, 1, а другой — с измерениями a, b, c, «стоящие» на плоскости α так, как показано на рисунке 350, *б*. Объём первого параллелепипеда, как было доказано, равен ab. Докажем, что объём второго параллелепипеда равен abc.

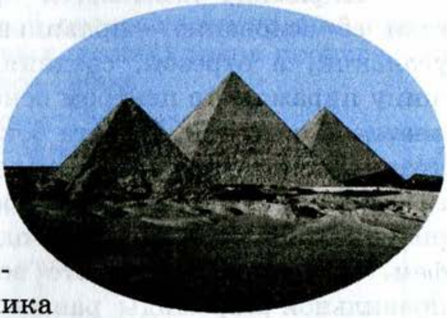
Любая секущая плоскость, параллельная плоскости α, даёт в качестве сечения первого параллелепипеда прямоугольник площади a, а в качестве сечения второго — прямоугольник площади ac (см. рис. 350, *б*). Поэтому объём V второго параллелепипеда в c раз больше объёма первого и, следовательно, равен $V = abc$, что и требовалось доказать.

В прямоугольном параллелепипеде с измерениями a, b, c, изображённом на рисунке **350, б**, площадь S основания равна ac, а высота h равна боковому ребру: $h = b$. Поэтому формулу $V = abc$ можно записать в виде $V = Sh$, т. е. **объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.**

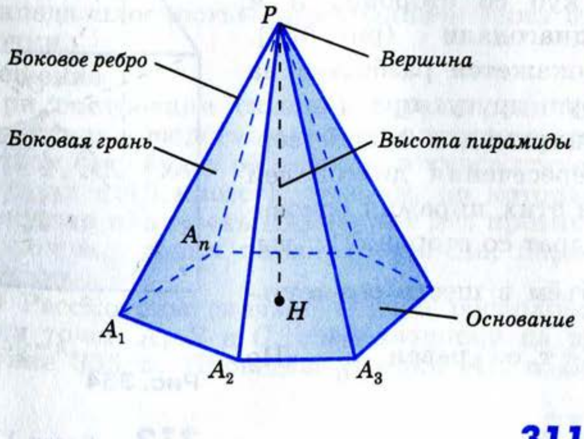
Оказывается, что в точности такая же формула имеет место для любой призмы: **объём призмы равен произведению площади основания на высоту.**

Это утверждение нетрудно доказать с помощью принципа Кавальери (см. задачу **1198**).

128 Пирамида



Рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$ и точку P, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку P отрезками с вершинами многоугольника (рис. 351), получим n треугольников PA_1A_2, PA_2A_3, ..., PA_nA_1. Многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2...A_n$ и этих треугольников, называется



n-угольная пирамида $PA_1A_2...A_n$

Рис. 351

пирамидой. Многоугольник $A_1A_2...A_n$ называется **основанием** пирамиды, а указанные треугольники — **боковыми гранями** пирамиды. Точка P называется **вершиной** пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n — её **боковыми рёбрами.** Пирамиду с вершиной P и основанием $A_1A_2...A_n$ называют ***n*-угольной пирамидой** и обозначают так: $PA_1A_2...A_n$. На рисунке 352 изображены четырёхугольная и шестиугольная пирамиды. Треугольную пирамиду часто называют **тетраэдром.**

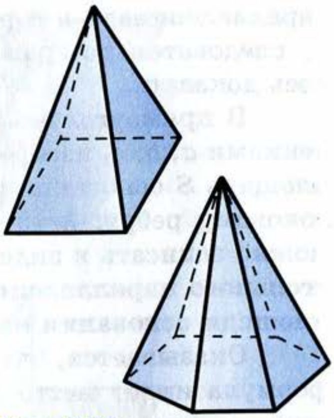


Рис. 352

Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с плоскостью её основания и перпендикулярный к этой плоскости, называется **высотой** пирамиды. На рисунке 351 отрезок PH — высота пирамиды.

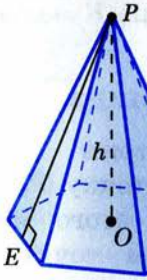


Рис. 353

Пирамида называется **правильной,** если её основание — правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является её высотой. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется **апофемой.** На рисунке 353 отрезок PE — одна из апофем. Можно доказать, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу (задача **1205**).

Рассмотрим куб со стороной a и проведём его диагонали (рис. 354). В результате куб окажется разбитым на шесть равных друг другу правильных четырёхугольных пирамид с общей вершиной в точке пересечения диагоналей куба. У каждой из этих пирамид основанием является квадрат со стороной a, высота равна $\frac{a}{2}$, а объём в шесть раз меньше объёма куба, т. е. равен $\frac{a^3}{6}$. Но

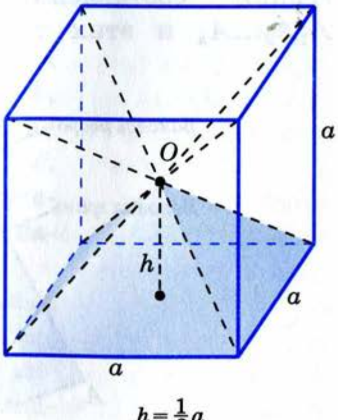


Рис. 354

$\frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} Sh$, где $S = a^2$ — площадь основания пирамиды, $h = \frac{a}{2}$ — её высота. Таким образом, объём правильной четырёхугольной пирамиды со стороной основания a и высотой h равен одной трети произведения площади основания на высоту. Основываясь на этом факте, можно доказать (см. задачу **1210**), что аналогичное утверждение справедливо и для произвольной пирамиды: **объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

Задачи

1184 Сколько граней, рёбер и вершин имеет: а) прямоугольный параллелепипед; б) тетраэдр; в) октаэдр?

1185 Докажите, что число вершин любой призмы чётно, а число рёбер кратно 3.

1186 Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы (т. е. сумма площадей её боковых граней) равна произведению периметра основания на боковое ребро.

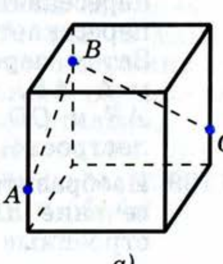
1187 Существует ли параллелепипед, у которого: а) только одна грань — прямоугольник; б) только две смежные грани — ромбы; в) все углы граней острые; г) все углы граней прямые; д) число всех острых углов граней не равно числу всех тупых углов граней?

1188 На трёх рёбрах параллелепипеда даны точки A, B и C. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эти точки.

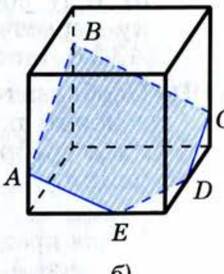
Решение

При построении сечений параллелепипеда нужно руководствоваться следующим правилом (оно будет обосновано в курсе стереометрии в 10 классе): **отрезки, по которым секущая плоскость пересекает две противоположные грани параллелепипеда, параллельны.**

1) Рассмотрим сначала случай расположения точек A, B и C, изображённый на рисунке 355, $а$. Проведём отрезки AB и BC.



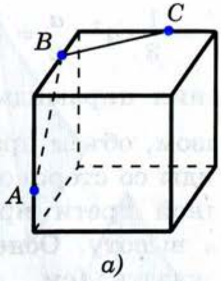
а)



б)

Рис. 355

Далее, руководствуясь указанным правилом, через точку A проведём в плоскости «передней» грани прямую, параллельную BC, а через точку C в плоскости боковой грани проведём прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с рёбрами нижней грани дают точки E и D (рис. 355, *б*). Остаётся провести отрезок DE, и искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$ — построено.



2) Обратимся теперь к случаю, представленному на рисунке 356, *а*. Этот случай более трудный, чем предыдущий. Можно провести отрезки AB и BC (см. рис. 356, *а*), но что делать дальше? Поступим так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания параллелепипеда. С этой целью продолжим отрезок AB и нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и отрезок AB, до пересечения в точке M (рис. 356, *б*). Далее, через точку M проведём в плоскости нижнего основания прямую, параллельную BC. Это и есть та прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с рёбрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведём прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проведём отрезки AF и CD, и искомое сечение — шестиугольник $ABCDEF$ — построено.

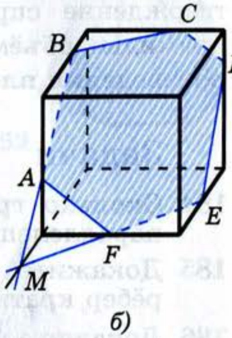


Рис. 356

1189 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью[1]: а) ABC_1; б) ACC_1. Докажите, что построенные сечения — параллелограммы.

1190 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M и N соответственно на рёбрах BB_1 и CC_1. Постройте точку пересечения: а) прямой MN с плоскостью ABC; б) прямой AM с плоскостью $A_1B_1C_1$.

1191 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Докажите, что построенное сечение — трапеция.

---

[1] Для краткости записи плоскость, проходящую через точки A, B и C_1, мы называем плоскостью ABC_1; аналогичные обозначения плоскостей используются и в других задачах.

1192 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на рёбрах: а) BB_1, AA_1, AD; б) CC_1, AD, BB_1.

1193 Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны а) 1, 1, 2; б) 8, 9, 12; в) $\sqrt{39}$, 7, 9.

1194 Ребро куба равно a. Найдите диагональ этого куба.

1195 Тело R состоит из тел P и Q, имеющих соответственно объёмы V_1 и V_2. Выразите объём V тела R через V_1 и V_2, если:
а) тела P и Q не имеют общих внутренних точек;
б) тела P и Q имеют общую часть, объём которой равен $\frac{1}{3}V_1$.

1196 Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 8 см, 12 см и 18 см. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму этого параллелепипеда.

1197 Найдите объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 13$ см, $BD = 12$ см и $BC_1 = 11$ см.

1198 Докажите, что объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим призму и прямоугольный параллелепипед с площадями оснований, равными S, и высотами, равными h, «стоящие» на одной плоскости (рис. 357).

Докажем, что объём призмы равен Sh. Любая секущая плоскость, параллельная плоскости оснований, даёт в качестве сечения призмы равный её основанию многоугольник площади S, а в качестве сечения прямоугольного параллелепипеда — прямоугольник площади S. Следовательно, объём призмы равен объёму параллелепипеда. Но объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту, т. е. равен Sh. Поэтому и объём призмы равен Sh.

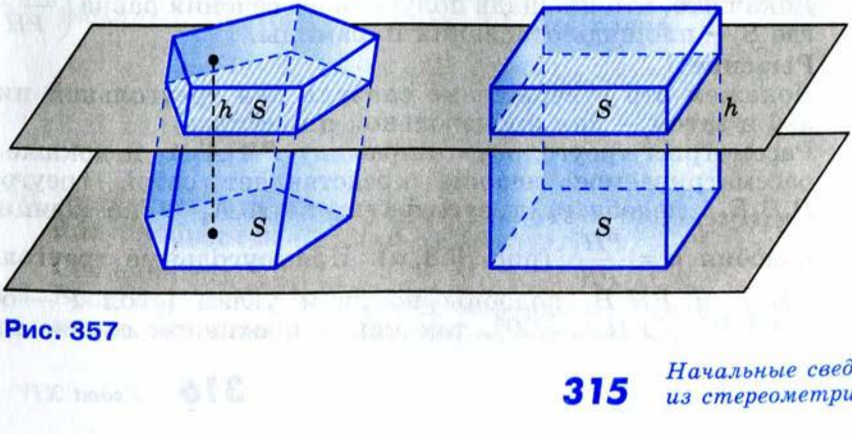


Рис. 357

1199 Найдите объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle BAC = 120°$, $AB = 5$ см, $AC = 3$ см, а наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2.

1200 Найдите объём правильной n-угольной призмы, все рёбра которой равны a, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$.

1201 Существует ли тетраэдр, у которого пять углов граней — прямые?

1202 Изобразите тетраэдр $DABC$ и на рёбрах DB, DC и BC отметьте соответственно точки M, N и K. Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC; б) прямой KN и плоскости ABD.

1203 Изобразите тетраэдр $KLMN$ и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN.

1204 Изобразите тетраэдр $DABC$, отметьте точки M и N на рёбрах BD и CD и внутреннюю точку K грани ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

1205 Докажите, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

1206 Докажите, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды (т. е. сумма площадей её боковых граней) равна половине произведения периметра основания на апофему.

1207 Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые рёбра пирамиды, если её высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

1208 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона её основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведённого через вершину пирамиды и бо́льшую диагональ основания.

1209* Через точку H_1 высоты PH пирамиды $PA_1A_2...A_n$ проведена секущая плоскость β, параллельная плоскости α её основания. Докажите, что площадь полученного сечения равна $\left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S$, где S — площадь основания пирамиды.

Решение

Докажем это утверждение сначала для треугольной пирамиды, а затем — для произвольной пирамиды.

Рассмотрим треугольную пирамиду $PA_1A_2A_3$ и докажем, что рассматриваемое сечение представляет собой треугольник $B_1B_2B_3$, подобный треугольнику $A_1A_2A_3$ с коэффициентом подобия $k = \frac{PH_1}{PH}$ (рис. 358, *а*). Прямоугольные треугольники PHA_1 и PH_1B_1 подобны по двум углам (угол P — общий; $\angle PH_1B_1 = \angle PHA_1 = 90°$, так как в противном случае прямые

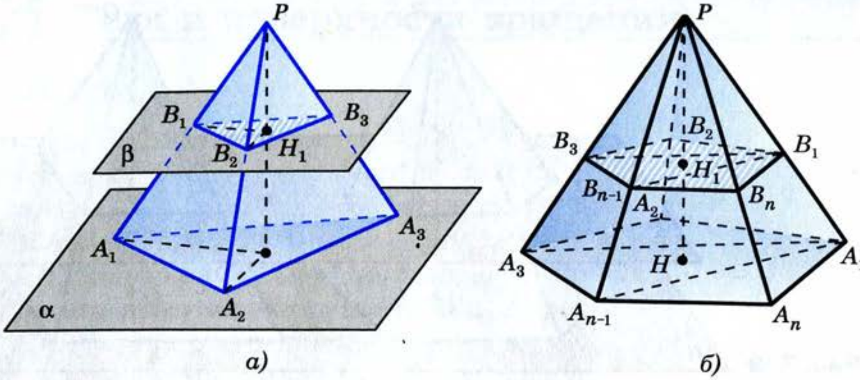


Рис. 358 а) б)

HA_1 и H_1B_1, а значит, и плоскости α и β пересекались бы, что противоречит условию), поэтому $\frac{PB_1}{PA_1} = \frac{PH_1}{PH} = k$. Аналогично из подобия треугольников PHA_2 и PH_1B_2 находим: $\frac{PB_2}{PA_2} = \frac{PH_1}{PH}$. Таким образом, $\frac{PB_1}{PA_1} = \frac{PB_2}{PA_2} = k$, откуда следует, что треугольники PB_1B_2 и PA_1A_2 подобны по второму признаку подобия треугольников. Поэтому $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = k$. Точно так же доказывается, что $\frac{B_2B_3}{A_2A_3} = k$ и $\frac{B_3B_1}{A_3A_1} = k$. Таким образом, треугольники $B_1B_2B_3$ и $A_1A_2A_3$ подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{PH_1}{PH}$, и, следовательно, площадь треугольника $B_1B_2B_3$ равна $\left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S$.

Рассмотрим теперь произвольную пирамиду. Её можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой PH (на рисунке 358, *б* показано разбиение выпуклой пятиугольной пирамиды). Поэтому площадь сечения равна

$$S_{B_1B_2B_3} + \ldots + S_{B_1B_{n-1}B_n} =$$

$$= \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot (S_{A_1A_2A_3} + \ldots + S_{A_1A_{n-1}A_n}) = \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S.$$

1210 Докажите, что объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим две пирамиды, «стоящие» на одной плоскости: произвольную пирами-

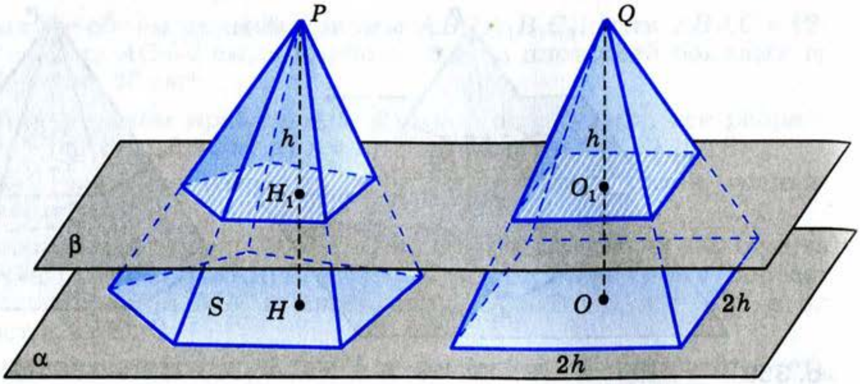


Рис. 359

ду с площадью основания S и высотой $PH = h$ и правильную четырёхугольную пирамиду с высотой $QO = h$ и стороной основания $2h$ (рис. 359). Согласно доказанному в п. 128 объём второй пирамиды равен $\frac{1}{3}(2h)^2 \cdot h = \frac{4}{3}h^3$. Требуется доказать, что объём V первой пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$.

Проведём секущую плоскость, параллельную плоскости оснований пирамид и пересекающую высоты PH и QO в точках H_1 и O_1 соответственно. Площадь сечения первой пирамиды равна $\left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S$, а площадь сечения второй — $\left(\frac{QO_1}{QO}\right)^2 \cdot 4h^2$ (см. задачу **1209**). По условию $PH = QO = h$. Интуитивно ясно также, что $PH_1 = QO_1$ (аккуратное доказательство этого факта будет дано в курсе стереометрии 10—11 классов).

Следовательно, площадь сечения первой пирамиды в $\frac{S}{4h^2}$ раз больше площади сечения второй пирамиды. Поэтому и её объём V в $\frac{S}{4h^2}$ раз больше, т. е. $V = \frac{S}{4h^2} \cdot \frac{4}{3}h^2 \cdot h = \frac{1}{3}Sh$, что и требовалось доказать.

1211 Найдите объём пирамиды с высотой h, если: а) $h = 2$ м, а основанием является квадрат со стороной 3 м; б) $h = 2{,}2$ м, а основанием является треугольник ABC, в котором $AB = 20$ см, $BC = 13{,}5$ см, $\angle ABC = 30°$.

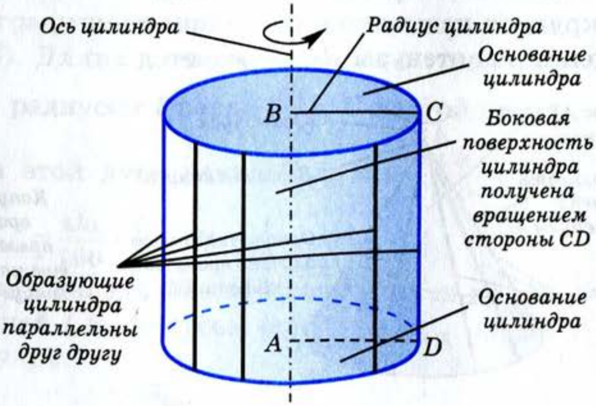
1212 Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона её основания равна m, а плоский угол (т. е. угол грани) при вершине равен α.

129 Цилиндр

Возьмём прямоугольник $ABCD$ и будем вращать его вокруг одной из сторон, например вокруг стороны AB (рис. 360). В результате получится тело, которое называется **цилиндром.** Прямая AB называется **осью** цилиндра, а отрезок AB — его **высотой.** При вращении сторон AD и BC образуются два равных круга — они называются **основаниями** цилиндра, а их радиус называется **радиусом** цилиндра. При вращении стороны CD образуется поверхность, состоящая из отрезков, параллельных оси цилиндра. Её называют **цилиндрической поверхностью** или **боковой поверхностью** цилиндра, а отрезки, из которых она составлена, — **образующими цилиндра.** Таким образом, цилиндр — это тело, ограниченное двумя равными кругами и цилиндрической поверхностью.

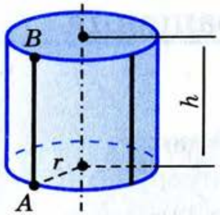
Пользуясь принципом Кавальери, можно доказать (см. задачу **1213**), что **объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.**

На рисунке 361, *а* изображён цилиндр с радиусом r и высотой h. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей



Цилиндр получен вращением прямоугольника ABCD вокруг стороны AB

Рис. 360



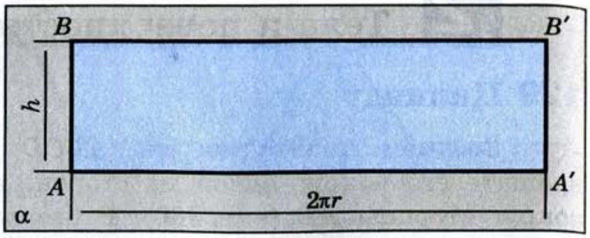


Рис. 361

AB и развернули таким образом, что получился прямоугольник $ABB'A'$, стороны AB и $A'B'$ которого являются двумя краями разреза боковой поверхности цилиндра (рис. 361, *б*). Этот прямоугольник называется **развёрткой боковой поверхности цилиндра**. Сторона AA' прямоугольника равна длине окружности основания, а сторона AB равна высоте цилиндра, т. е. $AA' = 2\pi r$, $AB = h$.

Площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности цилиндра равна площади её развёртки, т. е. $S_{\text{бок}} = 2\pi rh$.

130 Конус

Возьмём прямоугольный треугольник ABC и будем вращать его вокруг катета AB (рис. 362). В результате получится тело, которое называется **конусом**. Прямая AB называется **осью** конуса, а отрезок AB — его **высотой**. При вращении катета BC образуется круг, он называется **основанием** конуса. При вращении гипотенузы AC образуется

Рис. 362

поверхность, состоящая из отрезков с общим концом A. Её называют **конической поверхностью** или **боковой поверхностью** конуса, а отрезки, из которых она составлена, — **образующими конуса.** Таким образом, конус — это тело, ограниченное кругом и конической поверхностью.

Пользуясь принципом Кавальери, можно доказать (см. задачу **1219**), что **объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

Иначе говоря, объём V конуса выражается формулой $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания конуса, h — его высота.

Рассмотрим теперь конус, у которого радиус основания равен r, а образующая равна l (рис. 363, *а*). Его боковую поверхность можно развернуть на плоскость, разрезав её по одной из образующих. **Развёртка боковой поверхности конуса** представляет собой круговой сектор (рис. 363, *б*). Радиус этого сектора равен образующей конуса, т. е. равен l, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса, т. е. равна $2\pi r$.

Площадь $S_{бок}$ боковой поверхности конуса равна площади её развёртки, т. е.

$$S_{бок} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha,$$

где α — градусная мера дуги сектора (см. рис. 363, *б*). Длина дуги окружности с градусной мерой α и радиусом l равна $\frac{\pi l \alpha}{180}$. С другой стороны, длина этой дуги равна $2\pi r$, т. е. $\frac{\pi l \alpha}{180} = 2\pi r$, поэтому $S_{бок} = \frac{\pi l \alpha}{180} \cdot \frac{l}{2} = 2\pi r \cdot \frac{l}{2} = \pi r l.$

Итак, площадь боковой поверхности конуса с образующей l и радиусом основания r выражается формулой:

$$S_{бок} = \pi r l.$$

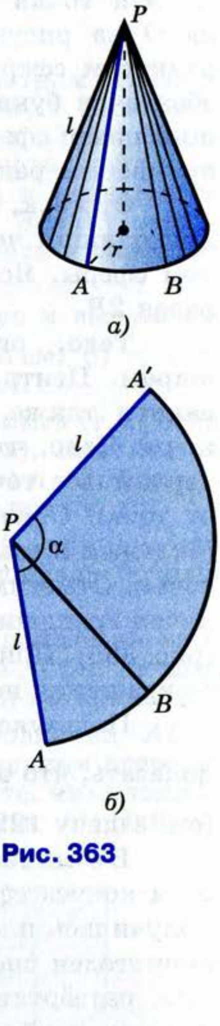


Рис. 363

131 Сфера и шар

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки (рис. 364). Данная точка называется **центром** сферы (точка O на рисунке 364), а данное расстояние — **радиусом** сферы (на рисунке 364 радиус сферы обозначен буквой R). Любой отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо её точкой, также называется радиусом сферы.

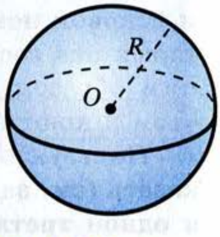
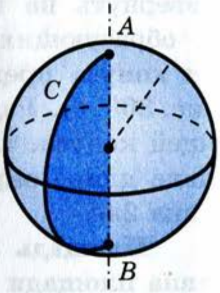


Рис. 364

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через её центр, называется **диаметром** сферы. Ясно, что диаметр сферы радиуса R равен $2R$.

Тело, ограниченное сферой, называется **шаром**. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара. Ясно, что шар радиуса R с центром O содержит все точки пространства, расположенные от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая и саму точку O), и не содержит других точек. Отметим также, что шар может быть получен вращением полукруга вокруг его диаметра (рис. 365). При этом сфера образуется в результате вращения полуокружности.



Шар получен вращением полукруга ACB вокруг диаметра AB

Рис. 365

Пользуясь принципом Кавальери, можно доказать, что **объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$** (см. задачу **1224**).

В отличие от боковых поверхностей цилиндра и конуса сферу нельзя развернуть так, чтобы получилась плоская фигура. Поэтому для сферы непригоден способ вычисления площади с помощью развёртки. Вопрос о том, что понимать под **площадью сферы** и как её вычислить, будет рассмотрен в курсе стереометрии в 11 классе. Здесь же отметим, что для площади S сферы радиуса R получается формула:

$$S = 4\pi R^2.$$

Один из возможных способов получения этой формулы даёт задача **1225**.

Задачи

1213 Докажите, что объём цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим цилиндр и призму с площадями оснований, равными S, и высотами, равными h, «стоящие» на одной плоскости (рис. 366). Любая секущая плоскость, параллельная этой плоскости, даёт в качестве сечения цилиндра круг площади S, а в качестве сечения призмы — многоугольник площади S. Значит, объём цилиндра равен объёму призмы. Но объём призмы равен Sh. Поэтому и объём цилиндра равен Sh.

1214 Пусть V, r и h — соответственно объём, радиус и высота цилиндра. Найдите: а) V, если $r = 2\sqrt{2}$ см, $h = 3$ см; б) r, если $V = 120$ см^3, $h = 3{,}6$ см; в) h, если $r = h$, $V = 8\pi$ см^3.

1215 В цилиндр вписана правильная n-угольная призма (т. е. основания призмы вписаны в основания цилиндра). Найдите отношение объёмов призмы и цилиндра, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$; д) n — произвольное натуральное число.

1216 Диаметр основания цилиндра равен 1 м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

1217 Сколько квадратных метров листовой жести пойдёт на изготовление трубы длиной 4 м и диаметром 20 см, если на швы необходимо добавить 2,5% площади её боковой поверхности?

1218 Один цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой AB, а другой цилиндр — вращением этого же прямоугольника вокруг прямой BC. а) Докажите, что площади боковых поверхностей этих цилиндров равны. б) Найдите

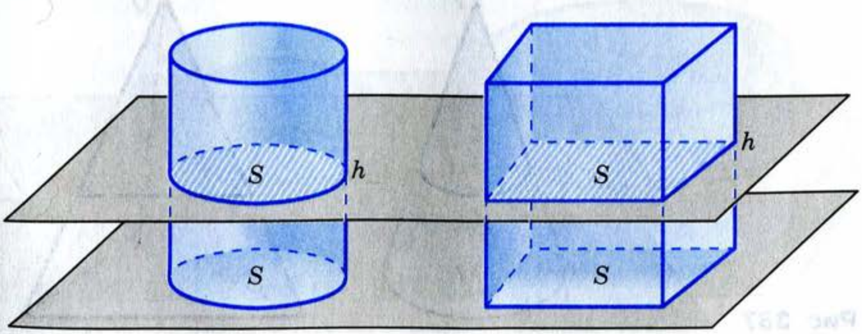


Рис. 366

отношение площадей полных поверхностей этих цилиндров, если $AB = a$, $BC = b$.

1219* Докажите, что объём конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим конус и пирамиду с площадями оснований S и высотами $PH = h$ и $QO = h$ соответственно, «стоящие» на одной плоскости α (рис. 367). Докажем, что объём конуса равен $\frac{1}{3}Sh$.

Проведём секущую плоскость β, параллельную плоскости α и пересекающую высоты PH и QO в точках H_1 и O_1 соответственно. В сечении конуса плоскостью β получится круг радиуса H_1A_1. Треугольники PH_1A_1 и PHA подобны по двум углам ($\angle P$ — общий, $\angle PH_1A_1 = \angle PHA = 90°$, так как в противном случае прямые HA и H_1A_1, а значит, и плоскости α и β пересекались бы, что противоречит условию). Поэтому $\frac{H_1A_1}{HA} = \frac{PH_1}{PH}$, откуда $H_1A_1 = \frac{PH_1}{PH} \cdot HA$, и площадь сечения конуса равна

$$\pi H_1A_1^2 = \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot \pi HA^2 = \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S.$$

Площадь сечения пирамиды равна $\left(\frac{GO_1}{GO}\right)^2 \cdot S$ (см. задачу 1209). По условию $PH = QO = h$. Интуитивно ясно также, что $PH_1 = QO_1$ (аккуратное доказательство этого факта будет дано в курсе стереометрии 10—11 классов).

Следовательно, площадь сечения конуса равна площади сечения пирамиды. Поэтому и его объём равен объёму пирамиды, т. е. равен $\frac{1}{3}Sh$, что и требовалось доказать.

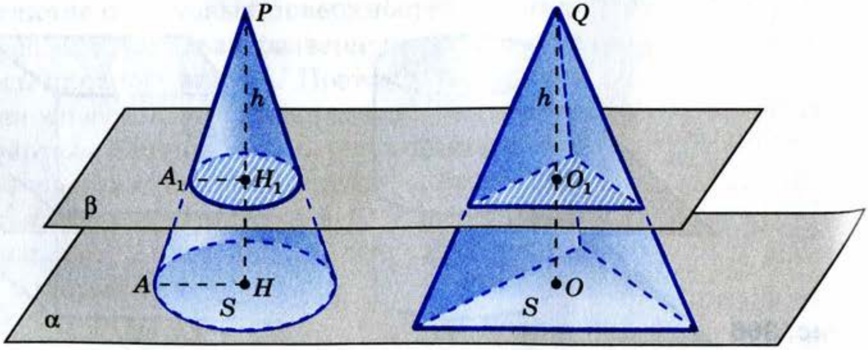


Рис. 367

1220 Пусть h, r и V — соответственно высота, радиус основания и объём конуса. Найдите: а) V, если $h = 3$ см, $r = 1{,}5$ см; б) h, если $r = 4$ см, $V = 48\pi$ см^3; в) r, если $h = m$, $V = p$.

1221 Найдите объём конуса, если площадь его основания равна Q, а площадь боковой поверхности равна P.

1222 Площадь полной поверхности конуса равна 45π дм^2. Развёртка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор с дугой в $60°$. Найдите объём конуса.

1223 Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

1224* Докажите, что объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Решение

Рассмотрим два тела: половину шара радиуса R и тело T, представляющее собой цилиндр радиуса R с высотой R, из которого вырезан конус с радиусом основания и высотой R. Представим себе, что оба тела «стоят» на плоскости α так, как показано на рисунке 368. Проведём секущую плоскость β, параллельную плоскости α и пересекающую радиус шара OA, перпендикулярный к плоскости α, в точке A_1, а высоту BH конуса — в точке B_1.

Сечение половины шара представляет собой круг радиуса $\sqrt{R^2 - OA^2}$ (см. рис. 368). Поэтому площадь этого круга равна $\pi(R^2 - OA^2)$.

Сечение тела T представляет собой кольцо, площадь которого равна разности площадей двух кругов: круга радиуса R и круга радиуса B_1B_2 (см. рис. 368), т. е. равна $\pi(R^2 - B_1B_2^2)$. Но $B_1B_2 = BB_1$ (объясните почему) и, кроме того, $BB_1 = OA_1$ (доказательство этого наглядно очевидного факта будет приведено в курсе стереометрии 10—11 классов).

Таким образом, площадь сечения половины шара равна площади сечения тела T. Поэтому и объём половины шара равен

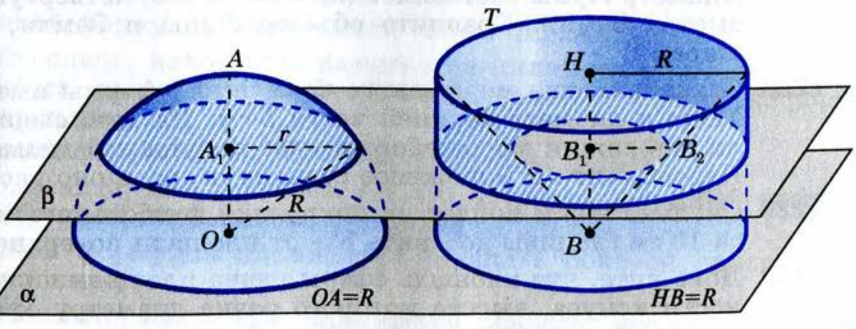


Рис. 368

объёму этого тела. В свою очередь, объём V тела T можно вычислить как разность объёмов цилиндра и конуса:

$$V = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Итак, объём половины шара равен $\frac{2}{3}\pi R^3$ и, следовательно, объём всего шара равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

1225 Сферу радиуса R покрасили слоем краски толщины d. Слоем такой же толщины покрасили многоугольник и затратили при этом такое же количество краски. Найдите площадь многоугольника.

Решение

Если толщина слоя краски равна d, то объём краски, затраченной на покраску сферы, равен разности объёмов двух шаров: шара радиуса $R+d$ и шара радиуса R, т. е. равен

$$\frac{4}{3}\pi(R+d)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi d\,(3R^2 + 3Rd + d^2).$$

При покраске многоугольника площади S слоем толщины d объём затраченной краски равен Sd, поскольку объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

Приравнивая эти два объёма и сокращая на d, находим S:

$$S = \frac{4}{3}\pi\,(3R^2 + 3Rd + d^2).$$

Замечание

Если толщина d слоя краски очень мала по сравнению с радиусом R сферы, то величина S приблизительно равна $\frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 = \frac{4}{3}\pi R^2$. Основываясь на проведённых рассуждениях, естественно принять за площадь сферы величину $4\pi R^2$.

1226 Пусть V — объём шара радиуса R, S — площадь его поверхности. Найдите: а) S и V, если $R = 4$ см; б) R и S, если $V = 113{,}04$ см^3; в) R и V, если $S = 64\pi$ см^2.

1227 Диаметр Луны составляет (приближённо) четвёртую часть диаметра Земли. Сравните объёмы Луны и Земли, считая их шарами.

1228 Стаканчик для мороженого конической формы имеет глубину 12 см и диаметр верхней части 5 см. На него сверху положили две ложки мороженого в виде полушарий диаметром 5 см. Переполнит ли мороженое стаканчик, если оно растает?

1229 Сколько кожи пойдёт на покрышку футбольного мяча радиуса 10 см (на швы добавить 8% от площади поверхности мяча)?

1230 Докажите, что площадь сферы равна площади полной поверхности конуса, высота которого равна диаметру сферы, а диаметр основания равен образующей конуса.

1231 Отношение объёмов двух шаров равно 8. Как относятся площади их поверхностей?

Вопросы для повторения к главе XIV

1 Объясните, что такое многогранник; что такое грани, рёбра, вершины и диагонали многогранника. Приведите примеры многогранников.

2 Объясните, как построить многогранник, называемый n-угольной призмой; что такое основания, боковые грани, боковые рёбра и высота призмы.

3 Какая призма называется: а) прямой; б) правильной?

4 Объясните, что такое параллелепипед; какие многоугольники являются гранями: а) параллелепипеда; б) прямого параллелепипеда; в) прямоугольного параллелепипеда.

5 Докажите, что четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

6 Объясните, как измеряются объёмы тел; что показывает число, выражающее объём тела при выбранной единице измерения объёмов.

7 Сформулируйте основные свойства объёмов.

8 Объясните, в чём заключается принцип Кавальери.

9 Что такое измерения прямоугольного параллелепипеда? Докажите, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

10 Докажите, что объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений.

11 Какой формулой выражается объём призмы?

12 Объясните, какой многогранник называется n-угольной пирамидой; что такое основания, боковые грани, вершина, боковые рёбра и высота пирамиды.

13 Объясните, какая пирамида называется правильной; что такое апофема правильной пирамиды.

14 Какой формулой выражается объём пирамиды?

15 Объясните, какое тело называется цилиндром; что такое ось, высота, основания, радиус, боковая поверхность, образующие цилиндра.

16 Какой формулой выражается объём цилиндра?

17 Объясните, как получается и что представляет собой развёртка боковой поверхности цилиндра.

18 Какой формулой выражается площадь боковой поверхности цилиндра?

19 Объясните, какое тело называется конусом; что такое ось, высота, основания, боковая поверхность, образующие конуса.

20 Какой формулой выражается объём конуса?

21 Объясните, как получается и что представляет собой развёртка боковой поверхности конуса.

22 Какой формулой выражается площадь боковой поверхности конуса?

23 Что называется сферой и что такое её центр, радиус и диаметр?

24 Какое тело называется шаром и что такое его центр, радиус и диаметр?

25 Какой формулой выражается объём шара?

26 Какой формулой выражается площадь сферы?

Дополнительные задачи

1232 Докажите, что диагональ параллелепипеда меньше суммы трёх рёбер, имеющих общую вершину.

1233 Докажите, что сумма квадратов четырёх диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов двенадцати его рёбер.

1234 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте:
а) его сечения плоскостями ABC_1 и DCB_1, а также отрезок, по которому эти сечения пересекаются;
б) его сечение плоскостью, проходящей через ребро CC_1 и точку пересечения диагоналей грани AA_1D_1D.

1235 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью BKL, где K — середина ребра AA_1, а L — середина ребра CC_1. Докажите, что построенное сечение — параллелограмм.

1236 Сумма площадей трёх граней прямоугольного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равна 404 дм^2, а его рёбра пропорциональны числам 3, 7 и 8. Найдите диагональ параллелепипеда.

1237 Найдите объём куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если: а) $AC = 12$ см; б) $AC_1 = 3\sqrt{2}$; в) $DE = 1$ см, где E — середина ребра AB.

1238 Найдите объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $AB = BC = m$, $\angle ABC = \varphi$ и $BB_1 = BD$, где BD — высота треугольника ABC.

1239 Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна 8 см и составляет с боковым ребром угол в 30°. Найдите объём призмы.

1240 Изобразите тетраэдр $DABC$, отметьте точку K на ребре DC и точки M и N граней ABC и ACD. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

1241 Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь поверхности пирамиды, т. е. сумму площадей всех её граней.

1242 Найдите объём правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12 см, а сторона основания равна 13 см.

1243 В правильной n-угольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а сторона основания равна a. Найдите объём пирамиды.

1244 Алюминиевый провод диаметром 4 мм имеет массу 6,8 кг. Найдите длину провода (плотность алюминия равна 2,6 г/см^3).

1245 Свинцовая труба (плотность свинца равна 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 мм. Какова масса трубы, если её длина равна 25 м?

1246 Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см^2. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.

1247 Из квадрата, диагональ которого равна d, свёрнута боковая поверхность цилиндра. Найдите площадь основания цилиндра.

1248 Высота конуса равна 5 см. На расстоянии 2 см от вершины его пересекает плоскость, параллельная основанию. Найдите объём этого конуса, если объём отсекаемого от него конуса равен 24 см^3.

1249 Высота конуса равна 12 см, а его объём равен 324π см^3. Найдите дугу развёртки боковой поверхности этого конуса.

1250 Вычислите площадь основания и высоту конуса, если развёрткой его боковой поверхности является сектор, радиус которого равен 9 см, а дуга равна 120°.

1251 Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна m, а угол при основании равен φ, вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при этом вращении.

1252 Шар и цилиндр имеют равные объёмы, а диаметр шара равен диаметру цилиндра. Выразите высоту цилиндра через радиус шара.

1253 В цилиндрическую мензурку диаметром 2,5 см, наполненную водой до некоторого уровня, опускают 4 равных металлических шарика диаметром 1 см. На сколько изменится уровень воды в мензурке?

1254 Вода покрывает приблизительно $\frac{3}{4}$ земной поверхности. Сколько квадратных километров земной поверхности занимает суша (радиус Земли считать равным 6375 км)?

1255 В каком отношении находятся объёмы двух шаров, если площади их поверхностей относятся как $m^2 : n^2$?

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе X

1256 Вершины четырёхугольника $ABCD$ имеют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ и $D(x_4; y_4)$. Докажите, что этот четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ и $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$.

1257 Даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Докажите, что координаты $(x; y)$ точки C, делящей отрезок AB в отношении λ (т. е. $\frac{AC}{CB} = \lambda$), выражаются формулами $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

1258 Из физики известно, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан. Найдите координаты центра тяжести такой пластинки, если координаты её вершин равны: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$.

1259 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(3; 0)$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.

1260 В треугольнике ABC $AC = 9$ см, $BC = 12$ см. Медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найдите AB.

1261 Найдите координаты центра тяжести системы трёх масс m_1, m_2 и m_3, сосредоточенных соответственно в точках $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$.

1262 В каждом из следующих случаев на оси абсцисс найдите точку M, для которой сумма её расстояний от точек A и B имеет наименьшее значение:
а) $A(2; 3)$, $B(4; -5)$;
б) $A(-2; 4)$, $B(3; 1)$.

1263 Докажите, что:
а) уравнение $Ax + By + C = 0$, где A и B одновременно не равны нулю, является уравнением прямой;
б) уравнение $x^2 - xy - 2 = 0$ не является уравнением окружности.

1264 Найдите точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 1$, и вычислите длину их общей хорды.

1265 Даны три точки A, B, C и три числа α, β, γ. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых сумма $\alpha AM^2 + \beta BM^2 + \gamma CM^2$ имеет постоянное значение, если:
а) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$;
б) $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

1266 Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. Для каждой точки M_1 прямой a на луче AM_1 взята такая точка M, что $AM_1 \cdot AM = k$, где k — данное положительное число. Найдите множество всех точек M.

1267 Точка O не лежит на данной окружности. Для каждой точки M_1 окружности на луче OM_1 взята такая точка M, что $OM = k \cdot OM_1$, где k — данное положительное число. Найдите множество всех точек M.

1268 Пусть A и B — данные точки, k — данное положительное число, не равное 1.

а) Докажите, что множество всех точек M, удовлетворяющих условию $AM = kBM$, есть окружность (окружность Аполлония).

б) Докажите, что эта окружность пересекается с любой окружностью, проходящей через точки A и B, так, что их радиусы, проведённые в точку пересечения, взаимно перпендикулярны.

Задачи к главе XI

1269 На сторонах квадрата $MNPQ$ взяты точки A и B так, что $NA = \frac{1}{2}MN$, $QB = \frac{1}{3}MN$ (рис. 369). Докажите, что $\angle AMB = 45°$.

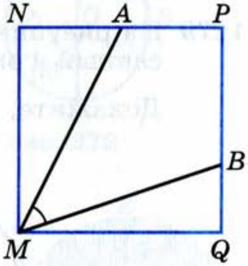


Рис. 369

1270 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Площадь треугольника ODC есть среднее пропорциональное между площадями треугольников OBC и OAD. Докажите, что $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC или параллелограмм.

1271 Докажите, что площадь S произвольного четырёхугольника со сторонами a, b, c, d (последовательно) удовлетворяет неравенству $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$.

1272 Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса AA_1 вычисляется по формуле $AA_1 = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$, где $b = AC$, $c = AB$.

1273 Выразите диагонали вписанного в окружность четырёхугольника через его стороны.

1274 Докажите, что площадь четырёхугольника, вписанного в окружность, может быть вычислена по формуле

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где p — полупериметр, a, b, c, d — стороны четырёхугольника.

1275 Докажите, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна к одной из биссектрис треугольника.

1276 В прямоугольной трапеции $ABCD$ меньшее основание AD равно 3, а боковая сторона CD, не перпендикулярная к основаниям, равна 6. Точка E — середина отрезка CD, угол CBE равен α. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

1277 В остроугольном треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, отрезки AM и CN — высоты треугольника, точка O — центр описанной окружности. Угол ABC равен β, а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S. Найдите сторону AC.

1278 В треугольнике ABC проведены высота AH длиной h, медиана AM длиной l, биссектриса AN. Точка N — середина отрезка MH. Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Задачи к главе XII

1279 На рисунке 370 изображён правильный десятиугольник, вписанный в окружность радиуса R, AC — биссектриса угла OAB. Докажите, что: а) $\triangle ABC \backsim \triangle OAB$; б) $AB = AC = OC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R$.

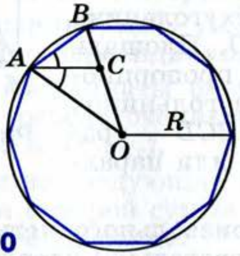


Рис. 370

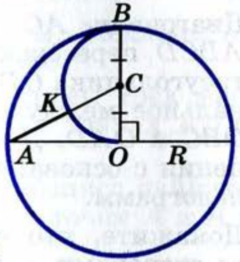


Рис. 371

1280 Докажите, что отрезок AK, изображённый на рисунке 371, равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность с центром O.

1281 Около правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ описана окружность с центром O. Вершинами треугольника ABC являются середины сторон A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4 пятиугольника. Докажите, что центр O данной окружности и центр O_1 окружности, вписанной в треугольник ABC, симметричны относительно прямой AC.

1282* В данную окружность впишите правильный десятиугольник.

1283 В данную окружность впишите правильный пятиугольник.

1284 В данную окружность впишите пятиконечную звезду.

1285 Пусть M — произвольная точка, лежащая внутри правильного n-угольника. Докажите, что сумма перпендикуляров, проведённых из точки M к прямым, содержащим стороны n-угольника, равна nr, где r — радиус вписанной окружности.

1286 Углы треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Докажите, что середины сторон и основания высот этого треугольника являются шестью вершинами правильного семиугольника.

1287 Пусть $ABCD$ — квадрат, а $A_1B_1C_1$ — правильный треугольник, вписанные в окружность радиуса R. Докажите, что сумма $AB + A_1B_1$ равна длине полуокружности с точностью до $0{,}01R$.

1288 По данным рисунка 372 докажите, что длина отрезка AC равна длине окружности с центром O радиуса R с точностью до $0{,}001R$.

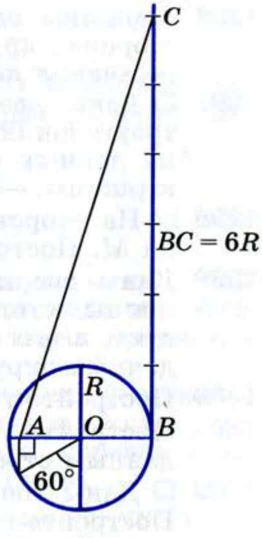


Рис. 372

1289 На рисунке 373 изображены четыре полуокружности: AEB, AKC, CFD, DLB, причём $AC = DB$. Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна площади круга, построенного на отрезке EF как на диаметре.

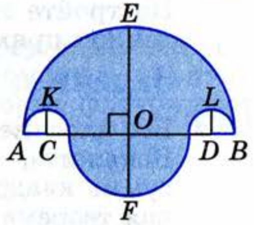


Рис. 373

1290 Постройте границу круга, площадь которого равна:
а) площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями;
б) площади данного полукруга;
в) площади данного кругового сектора, ограниченного дугой в 60°.

Задачи к главе XIII

1291 При данном движении g точка A отображается в точку B, а точка B — в точку A. Докажите, что g — центральная симметрия или осевая симметрия.

1292 Даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Докажите, что существуют два и только два движения, при которых точки A и B отображаются соответственно в точки A_1 и B_1.

1293 Докажите, что два параллелограмма равны, если диагонали и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны диагоналям и углу между ними другого.

1294 Докажите, что две трапеции равны, если основания и боковые стороны одной трапеции соответственно равны основаниям и боковым сторонам другой.

1295 Докажите, что два треугольника равны, если две неравные стороны и разность противолежащих им углов одного треугольника соответственно равны двум сторонам и разности противолежащих им углов другого.

1296 Вершины одного параллелограмма лежат соответственно на сторонах другого параллелограмма. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

1297 Даны две окружности и прямая. Постройте правильный треугольник так, чтобы две вершины лежали соответственно на данных окружностях, а высота, проведённая из третьей вершины, — на данной прямой.

1298 На стороне угла AOB с недоступной вершиной дана точка M. Постройте отрезок, равный отрезку OM.

1299 Даны две пересекающиеся окружности. Постройте отрезок, концы которого лежат соответственно на данных окружностях, а его середина совпадает с одной из точек пересечения данных окружностей.

1300 Постройте треугольник по трём медианам.

1301 Постройте трапецию, стороны которой соответственно равны данным отрезкам.

1302 Даны точки A и B и две пересекающиеся прямые c и d. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы вершины C и D лежали соответственно на прямых c и d.

1303 Даны прямая, окружность и точка A, не лежащая на них. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы вершина B лежала на данной прямой, а вершина D — на данной окружности.

Задачи к главе XIV

1304 Все плоские углы тетраэдра $OABC$ при вершине O — прямые. Докажите, что квадрат площади треугольника ABC равен сумме квадратов площадей остальных граней (пространственная теорема Пифагора).

1305 Докажите, что сечением куба может быть правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник.

1306 Комната имеет форму куба. Паук, сидящий в середине ребра, хочет, двигаясь по кратчайшему пути, поймать муху, сидящую в одной из самых удалённых от него вершин куба. Как должен двигаться паук?

1307 Докажите, что в кубе можно вырезать сквозное отверстие, через которое можно протащить куб таких же размеров.

1308 Плоскости AB_1C_1 и A_1BC разбивают правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ на четыре части. Найдите объёмы этих частей, если объём призмы равен V.

1309 Докажите, что плоскость, проходящая через ребро и середину противоположного ребра тетраэдра, разделяет его на две части, объёмы которых равны.

1310 Правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания a и плоским углом α при вершине вращается вокруг прямой, проходящей через вершину параллельно стороне основания. Найдите объём полученного тела.

Исследовательские задачи

Предлагаемые задачи ориентированы на проведение исследований, связанных как с решением некоторых задач из учебника, так и с постановкой новых задач.

7 класс

1 Сформулируйте новые признаки равенства треугольников, используя не только стороны и углы, но также медианы, биссектрисы и высоты треугольников. Примеры таких признаков дают задачи **161, 176, 329.**
Эта задача может быть поставлена перед группой учащихся: создать банк признаков равенства треугольников; может использоваться как предмет интеллектуального соревнования между двумя или несколькими группами учащихся.

2 Сформулируйте признаки равенства равнобедренных треугольников.

3 Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

4 Для каждого из новых признаков равенства треугольников рассмотрите задачу на построение: построить с помощью циркуля и линейки треугольник по тем элементам, которые фигурируют в признаке.

8 класс

1 Задача **813** и её обобщение на случай невыпуклого четырёхугольника. (Предложите способ решения, применимый для любого четырёхугольника.)

2 Теорема Птолемея и ряд задач, решаемых с её помощью (задачи **852, 889, 893, 1286**). Предложите свои задачи на применение этой теоремы.

3 Окружность Эйлера (задача **895**). Дополнительно исследуйте, сколько точек, указанных в задаче **895**, могут быть различными.

4 Прямая Симсона (задача **896**). Исследуйте все возможные случаи.

5 Прямая Эйлера: докажите, что в любом неравностороннем треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений), центр описанной около треугольника окружности и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой. Установите, в каком отношении эти точки разделяют отрезок с концами в крайних точках.

9 класс

1 Проведите полное исследование задачи на построение треугольника ABC по углу A и сторонам AB и BC. При каких условиях задача:
а) имеет решение;
б) имеет единственное решение;
в) имеет не единственное решение (и сколько решений);
г) не имеет решений?

2 Окружности Аполлония и их свойства (задачи **981, 1286**).

3 Использование движений в задачах на доказательство (задачи **1178—1180, 1291—1296**).

4 Использование движений в задачах на построение (задачи **1181—1183, 1297—1303**).

Темы рефератов

1 Характеристическое свойство фигуры. Характеристические свойства прямоугольника, ромба, квадрата, окружности.

2 Формулы площадей различных четырёхугольников.

3 Многоугольники на решётке. Формула Пика.

4 Изопериметрические задачи.

5 Теоремы Чевы и Менелая.

6 Прямая и окружность Эйлера.

7 Различные средние для нескольких отрезков.

8 Методы решения задач на построение (метод подобия, метод геометрических мест точек, использование движений).

9 Радикальная ось двух окружностей, радикальный центр трёх окружностей.

10 Вневписанные окружности.

11 Теорема Морли.

12 Использование движений при решении задач.

13 Центральное подобие и его применения (теорема Наполеона, прямая и окружность Эйлера, прямая Симсона).

14 Инверсия и её применения (теорема Птолемея и обратная ей, формула Эйлера для квадрата расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника, теорема Фейербаха, задача Аполлония).

Приложения

1 Об аксиомах планиметрии

При изучении геометрии мы опирались на ряд аксиом. Напомним, что аксиомами называются те основные положения геометрии, которые принимаются в качестве исходных. Вместе с так называемыми основными понятиями они образуют фундамент для построения геометрии. Первыми основными понятиями, с которыми мы познакомились, были понятия точки и прямой. Определения основных понятий не даются, а их свойства выражаются в аксиомах. Используя основные понятия и аксиомы, мы даём определения новых понятий, формулируем и доказываем теоремы и таким образом изучаем свойства геометрических фигур.

Отметим, что не все аксиомы, необходимые для построения планиметрии, были приведены в нашем курсе — для упрощения изложения некоторые из них мы не формулировали, хотя ими и пользовались. Здесь мы приведём все аксиомы планиметрии.

Первые три аксиомы характеризуют взаимное расположение точек и прямых.

1. **Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки[1].**
2. **Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.**
3. **Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.**

Для точек, лежащих на одной прямой, мы использовали понятие «лежать между», которое относим к основным понятиям геометрии. Свойство этого понятия выражено в следующей аксиоме:

4. **Из трёх точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.**

Подчеркнём, что, говоря «точка B лежит между точками A и C», мы имеем в виду, что A, B, C — различные точки прямой и точка B лежит также между C и A. Иногда вместо этих слов мы говорим, что точки A и B лежат по одну сторону от точки C (аналогично точки B и C лежат по одну сторону от точки A) или точки A и C лежат по разные стороны от точки B.

[1] Такие понятия, как «принадлежать», «множество», «число» и т. д., относятся не только к геометрии, но и к другим разделам математики. Поэтому мы считаем их известными и не относим к числу основных понятий планиметрии.

5. Каждая точка O прямой разделяет её на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки O, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки O.

При этом точка O не принадлежит ни одному из указанных лучей.

Напомним, что отрезком AB называется геометрическая фигура, состоящая из точек A и B и всех точек прямой AB, лежащих между A и B. Коротко можно сказать так: отрезок — это часть прямой, ограниченная двумя точками. Если отрезок AB не имеет общих точек с прямой a, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; если же отрезок AB пересекается с прямой a (в некоторой точке C, лежащей между A и B), то говорят, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.

6. Каждая прямая a разделяет плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой a.

Прямая a называется **границей** каждой из указанных полуплоскостей; её точки не принадлежат ни одной из этих полуплоскостей.

Следующие аксиомы связаны с понятиями наложения и равенства фигур. Понятие наложения относится в нашем курсе к основным понятиям геометрии. В главе I мы определили равенство геометрических фигур, используя понятие наложения. Мы опирались на наглядные представления о наложении фигур и допускали, что всякая геометрическая фигура может перемещаться как единое целое, наподобие того как перемещаются материальные тела. Но геометрические фигуры — не материальные тела, а воображаемые объекты, поэтому наложение геометрических фигур следует понимать в особом смысле.

Чтобы выяснить этот смысл, заметим, что при наложении фигуры Ф на равную ей фигуру $Ф_1$, как мы представляем его наглядно, каждая точка фигуры Ф накладывается на некоторую точку фигуры $Ф_1$. Иначе говоря, каждая точка фигуры Ф сопоставляется некоторой точке фигуры $Ф_1$. Но мы можем сопоставить каждую точку фигуры Ф некоторой точке фигуры $Ф_1$ и без непосредственного наложения Ф на $Ф_1$ (рис. 374). Такое сопоставление называется отображением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ (при этом подразумевается, что каждая точка фигуры $Ф_1$ оказывается сопоставленной не-

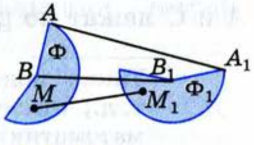


Рис. 374

которой точке фигуры Ф). Под наложением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ мы понимаем отображение Ф на $Ф_1$. Более того, мы считаем, что при этом не только точки фигуры Ф, но и любая точка плоскости отображается на определённую точку плоскости, т. е. **наложение — это отображение плоскости на себя.**

Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (см. ниже аксиомы 7—13). Чтобы сформулировать эти аксиомы, введём понятие равенства фигур. Пусть Ф и $Ф_1$ — две фигуры. **Если существует наложение, при котором фигура Ф отображается на фигуру $Ф_1$, то мы говорим, что фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$, или фигура Ф равна фигуре $Ф_1$.** Сформулируем теперь аксиомы о свойствах наложений.

7. Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.

8. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Это означает, что если даны какой-то отрезок AB и какой-то луч h с началом в точке O, то на луче h существует, и притом только одна, точка C, такая, что отрезок AB равен отрезку OC.

9. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.

Это означает, что если даны какой-то луч OA и какой-то неразвёрнутый угол CDE, то в каждой из двух полуплоскостей с границей OA существует, и притом только один, луч OB, такой, что угол CDE равен углу AOB.

10. Любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами: 1) так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч k — с лучом k_1; 2) так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k — с лучом h_1.

11. Любая фигура равна самой себе.

12. Если фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре Ф.

13. Если фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$, а фигура $Ф_2$ равна фигуре $Ф_3$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_3$.

Как видно, все приведённые аксиомы соответствуют нашим наглядным представлениям о наложении и равенстве фигур и поэтому не вызывают сомнений.

Следующие две аксиомы связаны с измерением отрезков. Прежде чем их сформулировать, напомним, как измеряются отрезки.

Пусть AB — измеряемый отрезок, PQ — выбранная единица измерения отрезков. На луче AB отложим отрезок $AA_1 = PQ$, на луче A_1B — отрезок $A_1A_2 = PQ$ и т. д. до тех пор, пока точка A_n не совпадёт с точкой B либо точка B не окажется лежащей между A_n и A_{n+1}. В первом случае говорят, что длина отрезка AB при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке AB n раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка AB при единице измерения PQ приближённо выражается числом n. Для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB. Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то её также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Мы предполагаем, что таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Это утверждение кратко сформулируем так:

14. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

Кроме того, мы принимаем аксиому существования отрезка данной длины.

15. При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

Систему аксиом планиметрии завершает аксиома параллельных прямых.

16. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Отметим, что для построения геометрии можно использовать различные системы аксиом. Например, вместо аксиомы параллельных прямых можно принять в качестве аксиомы утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°. Тогда утверждение «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной» можно доказать как теорему (попробуйте провести такое доказательство самостоятельно). От различных систем аксиом требуется лишь, чтобы они были эквивалентны, т. е. приводили бы к одним и тем же выводам.

Иногда стремятся к тому, чтобы аксиомы были независимы, т. е. ни одну из них нельзя было вывести из остальных. Мы не ставили перед собой такой цели. Например, утверждение аксиомы 5 может быть доказано на основе остальных аксиом, т. е. фактически это утверждение является теоремой, а не аксиомой. Однако для упрощения изложения мы приняли его в качестве аксиомы.

В заключение рассмотрим одну из самых первых теорем нашего курса — теорему, выражающую первый признак равенства треугольников (п. 15). Её доказательство опиралось на наглядные представления о наложении и равенстве фигур, понятие аксиомы тогда ещё не было введено. Напомним это доказательство и рассмотрим его с точки зрения принятых нами аксиом.

Нужно было доказать, что если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. С этой целью мы рассматривали такое наложение, при котором вершина A совмещается с вершиной A_1, а стороны AB и AC треугольника ABC накладываются соответственно на лучи A_1C_1 и A_1B_1. При этом мы опирались на наглядно очевидный факт, что такое наложение существует, поскольку углы A и A_1 равны. Теперь можно сказать, что существование такого наложения следует из аксиомы 10.

Далее мы рассуждали так: поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1, в частности совместятся точки B и B_1, C и C_1. Как обосновать этот факт, опираясь на аксиомы? Очень просто.

По аксиоме 8 на луче A_1B_1 от точки A_1 можно отложить только один отрезок, равный отрезку AB. Но по условию теоремы $AB = A_1B_1$, поэтому при нашем наложении точка B совместится с точкой B_1. Аналогично точка C совместится с точкой C_1. Остаётся сослаться на аксиому 7, чтобы обосновать тот факт, что сторона BC совместится со стороной B_1C_1. Теперь можно сделать вывод, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместились и, значит, они равны.

Как видим, само доказательство теоремы о первом признаке равенства треугольников, по существу, не изменилось, только теперь мы опирались уже не на наглядно очевидные факты, а на аксиомы, в которых эти факты выражены.

2 Некоторые сведения о развитии геометрии

Первое сочинение, содержащее простейшие геометрические сведения, дошло до нас из Древнего Египта. Оно относится к XVII в. до н. э. В нём содержатся правила вычисления площадей и объёмов некоторых фигур и тел. Эти правила были получены практическим путем, без какого-либо логического доказательства их справедливости.

Становление геометрии как математической науки произошло позднее и связано с именами греческих учёных Фалеса (ок. 625—547 гг. до н. э.), Пифагора (ок. 580—500 гг. до н. э.), Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.), Евклида (III в. до н. э.) и др.

В знаменитом сочинении Евклида «Начала» были систематизированы основные известные в то время геометрические сведения. Главное же — в «Началах» был развит аксиоматический подход к построению геометрии, который состоит в том, что сначала формулируются основные положения (аксиомы), а затем на их основе посредством рассуждений доказываются другие утверждения (теоремы)[1].

Полученные результаты используются как на практике, так и в дальнейших научных исследованиях. Некоторые из аксиом, предложенных Евклидом, и сейчас используются в курсах геометрии. Часть из них в современной формулировке имеется в нашем курсе. Например: «Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна».

Большой вклад в дальнейшее исследование различных вопросов геометрии внесли Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.), Аполлоний (III в. до н. э.) и другие древнегреческие учёные.

Качественно новый этап в развитии геометрии начался лишь много веков спустя — в XVII в. н. э. — и был связан с накопленными к этому времени достижениями алгебры. Выдающийся французский математик и философ Р. Декарт (1596—1650) предложил новый подход к решению геометрических задач. В своей «Геометрии» (1637) он ввёл метод координат, связав геометрию и алгебру, что позволило решать многие геометрические задачи алгебраическими методами.

В развитии геометрии важную роль сыграла аксиома, которая в «Началах» Евклида называлась пятым постулатом. Формулировка пятого постулата у Евклида весьма сложна[2]. Поэтому обычно его заменяют эквивалентной ему аксиомой параллельных прямых: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Много веков усилия большого числа учёных были направлены на доказательство пятого постулата. Это объяснялось тем, что число аксиом стремились свести к минимуму. Учёные думали, что пятый постулат можно доказать как теорему, опираясь на остальные аксиомы.

В конце XVIII в. у некоторых геометров возникла мысль о невозможности доказать пятый постулат. Решение этого вопроса было найдено великим русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856).

---

[1] На возможность такого подхода впервые указал древнегреческий учёный Аристотель (ок. 384—322 гг. до н. э.).

[2] Пятый постулат: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньше двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых».

Вся творческая жизнь нашего выдающегося соотечественника была связана с Казанским университетом, где он учился, затем был профессором, а с 1827 г. — ректором университета. Его очень рано заинтересовала геометрия, и он, как и многие его предшественники, пытался доказать пятый постулат Евклида. Лобачевский предпринял попытку доказать пятый постулат от противного: он предположил, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести несколько прямых, не пересекающих данную. Исходя из этого, он попытался получить утверждение, которое противоречило бы аксиомам или полученным из них теоремам. Если бы такое утверждение удалось получить, то это означало бы, что предположение неверно, а верно противоположное утверждение: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данную. Тем самым пятый постулат Евклида был бы доказан.

Но Лобачевский не получил противоречивых утверждений. На основании этого им был сделан замечательный вывод: можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. Такая геометрия им была построена. Её называют теперь геометрией Лобачевского. Сообщение об открытии новой геометрии было сделано Лобачевским в 1826 г.

К аналогичным выводам пришёл венгерский математик Я. Бойяи (1802—1860), но он свои результаты опубликовал несколько позже, в 1832 г. В рукописях великого немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1855) высказывались идеи, близкие к идеям Лобачевского и Бойяи. Однако он, опасаясь критики, не решился их обнародовать.

Открытие нашим великим соотечественником новой геометрии оказало огромное влияние на развитие науки. Геометрия Лобачевского широко используется в естествознании. Неизмеримо влияние новой геометрии на развитие самой геометрии. Наиболее ярко оно выразилось в дальнейшем углублении наших представлений о пространстве: ведь до Лобачевского казалось, что геометрией окружающего нас пространства может быть только евклидова геометрия. Но так как возможна другая геометрия, то истинность той или иной геометрии может быть проверена лишь опытным путём. Современной наукой установлено, что евклидова геометрия лишь приближённо, хотя и с весьма большой точностью, описывает окружающее нас пространство, а в космических масштабах она имеет заметное отличие от геометрии реального пространства.

Бурное развитие математики в XIX в. привело к ряду замечательных открытий в геометрии. Так, выдающимся немецким математиком Б. Риманом (1826—1866) была создана новая геометрия, обобщающая и геометрию Евклида, и геометрию Лобачевского.

Читатель вправе спросить: а являются ли геометрия Евклида и геометрия Лобачевского непротиворечивыми? Не может ли так случиться, что при дальнейшем развитии как той, так и другой геометрии получатся противоречивые выводы? Уже в конце XIX века было доказано, что если непротиворечива геометрия Евклида, то непротиворечива и геометрия Лобачёвского. Непротиворечивость той или иной геометрии доказывается с помощью какой-либо интерпретации (модели) её основных понятий и аксиом. Например, одной из известных интерпретаций евклидовой геометрии является арифметическая модель, в которой точка есть пара чисел $(x; y)$, записанная в определённом порядке, а прямая есть множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению $ax+bx+c=0$, где a и b — некоторые числа $(a^2+b^2 \neq 0)$. С помощью этой модели вопрос о непротиворечивости евклидовой геометрии сводится к вопросу о непротиворечивости арифметики, имеющей дело с вещественными числами. О моделях, реализующих систему аксиом геометрии Лобачевского, можно прочитать в различных книгах, например в книге В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, С. А. Шестакова, И. И. Юдиной «Планиметрия. Пособие для углублённого изучения математики» (М.: Физматлит, 2005).

Вопрос о непротиворечивости той или иной системы аксиом связан с важными проблемами непротиворечивости, полноты и независимости систем аксиом, определяющих ту или иную геометрию. Перечисленные проблемы относятся к предмету, называемому «Основания геометрии». Крупнейший вклад в решение этих проблем внёс великий немецкий математик Д. Гильберт (1862—1943).

Отметим, что в настоящее время геометрия широко используется в самых разнообразных разделах естествознания: в физике, химии, биологии и т. д. Неоценимо её значение в прикладных науках: в машиностроении, геодезии, картографии. Методы геометрии широко применяются практически во всех разделах науки и техники и, конечно же, в самой математике.