Глава V

Четырёхугольники

До сих пор в центре нашего внимания был самый простой из многоугольников — треугольник. В этой главе будем изучать более сложные многоугольники, в основном различные виды четырёхугольников: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Кроме того, в этой главе речь пойдёт о симметрии геометрических фигур, в том числе указанных четырёхугольников. Симметрия играет важную роль не только в геометрии, но и искусстве, архитектуре, технике. В окружающей обстановке мы видим немало симметричных предметов — фасады зданий, узоры на коврах и тканях, листья деревьев.

§1 Многоугольники

40 Многоугольник

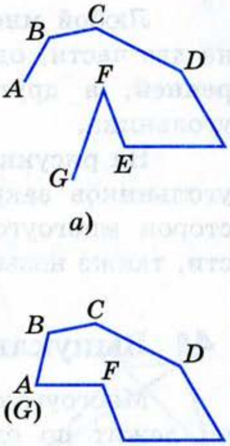


Рис. 150

Рассмотрим фигуру, составленную из отрезков AB, BC, CD, ..., EF, FG так, что **смежные** отрезки (т. е. отрезки AB и BC, BC и CD, ..., EF и FG) не лежат на одной прямой. Такая фигура называется **ломаной** $ABCD...FG$ (рис. 150, *а*). Отрезки, из которых составлена ломаная, называются её **звеньями**, а концы этих отрезков — **вершинами ломаной**. Сумма длин всех звеньев называется **длиной ломаной**. Концы ломаной $ABCD$ ... FG, т. е. точки A и G, могут быть различными, а могут совпадать (рис. 150, *б*). В последнем случае ломаная называется **замкнутой**, и её звенья FG и AB также считаются смежными. Если несмежные звенья замкнутой ломаной не имеют общих точек, то эта ломаная называется **многоугольником**, её звенья называются **сторонами многоугольника**, а длина ломаной называется **периметром многоугольника**.

Многоугольник с n вершинами называется **n-угольником**; он имеет n сторон. Примером многоугольника является треугольник. На рисунке 151 изображены четырёхугольник $ABCD$ и

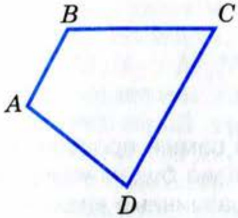
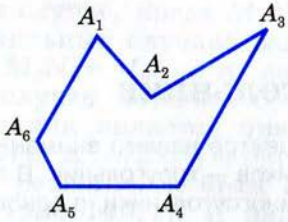


Рис. 151



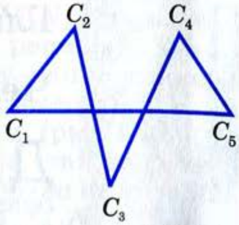


Рис. 152

шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Фигура, изображённая на рисунке 152, не является многоугольником, так как несмежные отрезки C_1C_5 и C_2C_3 (а также C_3C_4 и C_1C_5) имеют общую точку.

Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются **соседними**. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется **диагональю** многоугольника.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** многоугольника.

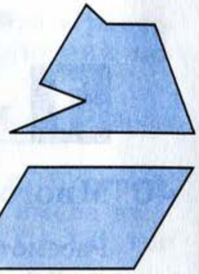


Рис. 153

На рисунке 153 внутренние области многоугольников закрашены. Фигуру, состоящую из сторон многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

41 Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

На рисунке 154 многоугольник F_1 является выпуклым, а многоугольник F_2 — невыпуклым.

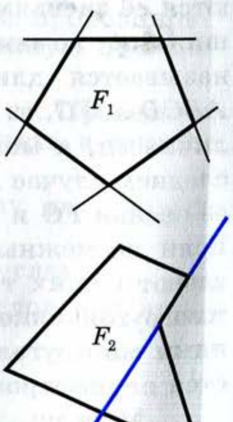


Рис. 154

Рассмотрим выпуклый n-угольник, изображённый на рисунке 155, *а*. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются **углами** этого многоугольника. Найдём их сумму.

Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате получим $n-2$ треугольника (рис. 155, *б*), сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна $180°$, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ равна $(n-2) \cdot 180°$.

Итак, **сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$.**

Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, смежный с углом многоугольника. Если при каждой вершине выпуклого многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ взять по одному внешнему углу, то сумма этих внешних углов окажется равной

$$180° - A_1 + 180° - A_2 + \ldots + 180° - A_n =$$
$$= n \cdot 180° - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$$
$$= n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°.$$

Таким образом, **сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.**

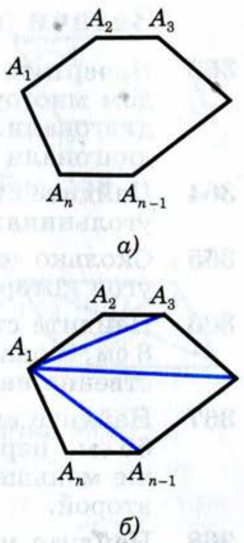


Рис. 155

42 Четырёхугольник

Каждый четырёхугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали (рис. 156). Две несмежные стороны четырёхугольника называются **противоположными.** Две вершины, не являющиеся соседними, также называются **противоположными.**

Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые. На рисунке 156, *а* изображён выпуклый четырёхугольник, а на рисунке 156, *б* — невыпуклый.

Каждая диагональ выпуклого четырёхугольника разделяет его на два треугольника. Одна из диагоналей невыпуклого четырёхугольника также разделяет его на два треугольника (см. рис. 156, *б*).

Так как сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$, то **сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.**

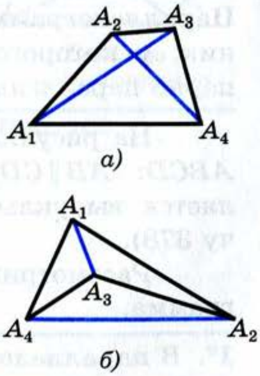


Рис. 156

Задачи

363 Начертите выпуклые пятиугольник и шестиугольник. В каждом многоугольнике из какой-нибудь вершины проведите все диагонали. На сколько треугольников разделяют проведённые диагонали каждый многоугольник?

364 Найдите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) десятиугольника.

365 Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен: а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 108°?

366 Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 8 см, а одна сторона больше каждой из других сторон соответственно на 3 мм, 4 мм и 5 мм.

367 Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 66 см, первая сторона больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей стороны, а четвёртая — в три раза больше второй.

368 Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если они равны друг другу.

369 Найдите углы A, B и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B = \angle C$, а $\angle D = 135°$.

370 Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

§2 Параллелограмм и трапеция

43 Параллелограмм

Определение

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

На рисунке 157 изображён параллелограмм $ABCD$: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Параллелограмм является выпуклым четырёхугольником (см. задачу **378**).

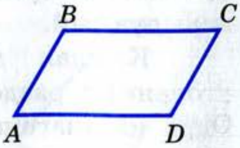


Рис. 157

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

1°. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 158). Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и ADC. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (AC — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей AC параллельных прямых AB и CD, AD и BC соответственно). Поэтому

$$AB = CD,\ AD = BC \text{ и } \angle B = \angle D.$$

Далее, пользуясь равенствами углов 1 и 2, 3 и 4, получаем

$$\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C.$$

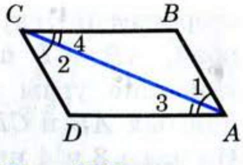


Рис. 158

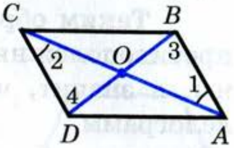


Рис. 159

2°. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по стороне и двум прилежащим углам ($AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и BD соответственно). Поэтому $AO = OC$ и $OB = OD$, что и требовалось доказать.

Рисунок 160 иллюстрирует все рассмотренные свойства.

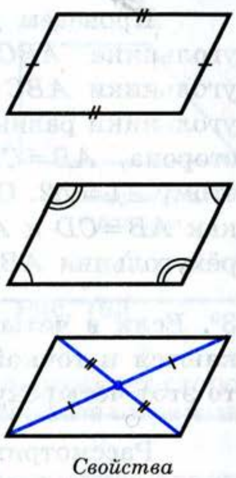

Свойства параллелограмма

Рис. 160

44 Признаки параллелограмма

Рассмотрим три признака параллелограмма.

1°. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = CD$ (см. рис. 158).

Проведём диагональ AC, разделяющую данный четырёхугольник на два треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, следовательно, $AD \parallel BC$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, а значит, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2^0. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Проведём диагональ AC данного четырёхугольника $ABCD$, разделяющую его на треугольники ABC и CDA (см. рис. 158). Эти треугольники равны по трём сторонам (AC — общая сторона, $AB = CD$ и $BC = DA$ по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$. Так как $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то по признаку 1^0 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

3^0. Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам (см. рис. 159). Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO = OC$, $BO = OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB = CD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Из равенства углов 1 и 2 следует, что $AB \parallel CD$.

Итак, в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны, значит, по признаку 1^0 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

45 Трапеция

Рис. 161

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются её **основаниями**, а две другие стороны — **боковыми сторонами** (рис. 161).

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны (рис. 162, *а*).

Трапеция, один из углов которой прямой, называется **прямоугольной** (рис. 162, *б*).

Равнобедренная трапеция

а)

Прямоугольная трапеция

б)

Рис. 162

Задачи

371 □ Докажите, что выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $\angle BAC=\angle ACD$ и $\angle BCA=\angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A=\angle C$.

372 Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если:
а) одна сторона на 3 см больше другой;
б) разность двух сторон равна 7 см;
в) одна из сторон в два раза больше другой.

373 Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, $\angle C=30°$, а перпендикуляр BH к прямой CD равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

374 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр этого параллелограмма, если $BK=15$ см, $KC=9$ см.

375 Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

376 Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если:
а) $\angle A=84°$; б) $\angle A-\angle B=55°$; в) $\angle A+\angle C=142°$; г) $\angle A=2\angle B$;
д) $\angle CAD=16°$, $\angle ACD=37°$.

377 В параллелограмме $MNPQ$ проведён перпендикуляр NH к прямой MQ, причём точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что $MH=3$ см, $HQ=5$ см, $\angle MNH=30°$.

378 Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырёхугольником.

Решение

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 157) и докажем, что он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. Возьмём, например, прямую AB. Отрезок CD не имеет общих точек с прямой AB, так как $AB \parallel CD$. Значит, этот отрезок лежит по одну сторону от прямой AB. Но тогда и отрезки BC и AD лежат по ту же сторону от прямой AB. Таким образом, параллелограмм $ABCD$ лежит по одну сторону от прямой AB.

379 ☐ Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$, у которого $AB \neq BC$ и угол A острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $BMDK$ — параллелограмм.

380 На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что $AM = CP$, $BN = DQ$, $BM = DP$, $NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

381 На рисунке 163 изображены два одинаковых колеса тепловоза. Радиусы O_1A и O_2B равны. Стержень AB, длина которого равна расстоянию O_1O_2 между центрами колёс, передаёт движение от одного колеса к другому. Докажите, что отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

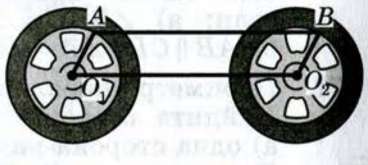


Рис. 163

382 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA, OB, OC и OD, — параллелограмм.

383 На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки P и Q так, что $PB = QD$. Докажите, что четырёхугольник $APCQ$ — параллелограмм.

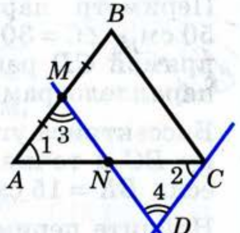


Рис. 164

384 Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC. Эта прямая пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что $AN = NC$.

Решение

Через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквой D точку пересечения этой прямой с прямой MN (рис. 164). Так как $AM = MB$ по условию, а $MB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма $BCDM$, то $AM = DC$. Треугольники AMN и CDN равны по второму при-

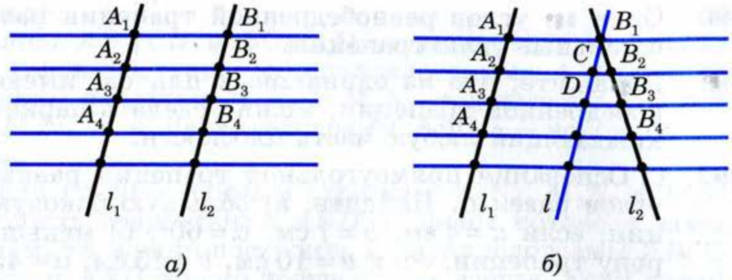


Рис. 165

знаку равенства треугольников ($AM = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и MD), поэтому $AN = NC$.

385 Докажите **теорему Фалеса**[1]: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Решение

Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 165). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 165, *а*). Тогда $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то и $B_1B_2 = B_2B_3$. Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведём прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 165, *б*). Она пересечёт прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то по доказанному $B_1C = CD$. Отсюда получаем: $B_1B_2 = B_2B_3$ (задача **384**). Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д.

386 Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции.

387 Найдите углы B и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle A = 36°$, $\angle C = 117°$.

388 Докажите, что в равнобедренной трапеции: а) углы при каждом основании равны; б) диагонали равны.

389 Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны.

---

[1] Фалес Милетский — древнегреческий учёный (ок. 625—547 гг. до н. э.).

390 Один из углов равнобедренной трапеции равен 68°. Найдите остальные углы трапеции.

391 Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

392 ☐ Основания прямоугольной трапеции равны a и b, один из углов равен α. Найдите: а) бо́льшую боковую сторону трапеции, если $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\alpha = 60°$; б) меньшую боковую сторону трапеции, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $\alpha = 45°$.

393 ☐ Постройте параллелограмм: а) по двум смежным сторонам и углу между ними; б) по двум диагоналям и углу между ними; в) по двум смежным сторонам и соединяющей их концы диагонали.

Решение

в) Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 166, *а*). Требуется построить параллелограмм $ABCD$, у которого смежные стороны, скажем AB и AD, равны соответственно отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а диагональ BD равна отрезку M_3N_3. Проведём решение задачи по схеме, описанной на с. 94.

Анализ

Допустим, что искомый параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 166, *б*). Мы видим, что стороны треугольника ABD равны данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3. Это обстоятельство подсказывает следующий путь решения задачи: сначала нужно построить по трём сторонам треугольник ABD, а затем достроить его до параллелограмма $ABCD$.

Построение

Строим треугольник ABD так, чтобы его стороны AB, AD и BD равнялись соответственно отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 (как это сделать, мы знаем из курса 7 класса). Затем построим прямую, проходящую через точку B параллельно AD, и вторую прямую, проходящую через точку D параллельно AB (как это сделать, мы также знаем из курса 7 класса). Точку пересечения этих прямых обозначим буквой C (рис. 166, *в*). Четырёхугольник $ABCD$ и есть искомый параллелограмм.

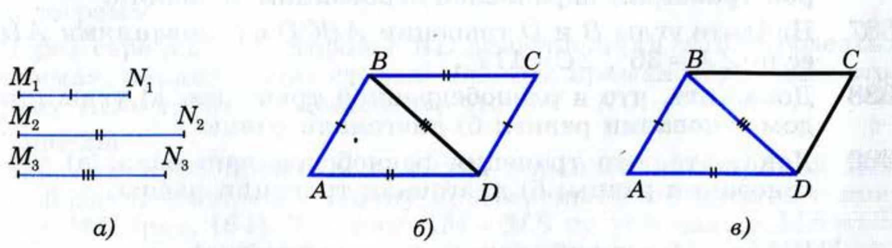


Рис. 166

Доказательство

По построению $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, поэтому $ABCD$ — параллелограмм. Смежные стороны параллелограмма $ABCD$ по построению равны отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а диагональ BD равна отрезку M_3N_3, т. е. параллелограмм $ABCD$ — искомый.

Исследование

Ясно, что если по трём данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 можно построить треугольник ABD, стороны которого равны этим отрезкам, то можно построить и параллелограмм $ABCD$. Но треугольник ABD можно построить не всегда. Если какой-то из трёх данных отрезков больше или равен сумме двух других, то треугольник ABD, а значит, и параллелограмм $ABCD$ построить нельзя. Попробуйте самостоятельно доказать, что если задача имеет решение, то это решение единственно (см. п. **39**).

394 Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм так, чтобы три его вершины совпадали с данными точками. Сколько таких параллелограммов можно построить?

395 Даны острый угол hk и два отрезка P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы расстояние между параллельными прямыми AB и DC равнялось P_1Q_1, $AB = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

396 Разделите данный отрезок AB на n равных частей.

Решение

Проведём луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нём от точки A отложим последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 167), т. е. столько равных отрезков, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (на рисунке 167 $n = 5$). Проведём прямую A_nB (точка A_n — конец последнего отрезка) и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} и параллельные прямой A_nB. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые по теореме Фалеса (задача **385**) делят отрезок AB на n равных частей.

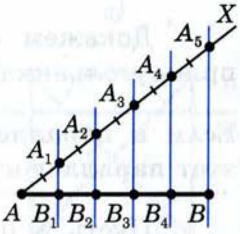


Рис. 167

397 Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$:
а) по основанию AD, углу A и боковой стороне AB;
б) по основанию BC, боковой стороне AB и диагонали BD.

398 Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ по основаниям и боковой стороне AD, перпендикулярной к основаниям.

§3 Прямоугольник, ромб, квадрат

46 Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые. Так как прямоугольник является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма: в прямоугольнике противоположные стороны равны, а диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Рассмотрим особое свойство прямоугольника.

Диагонали прямоугольника равны.

Действительно, обратимся к рисунку 168, на котором изображён прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны по двум катетам ($CD = BA$, AD — общий катет). Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны, т. е. $AC = BD$, что и требовалось доказать.

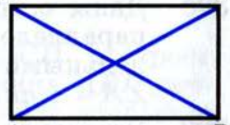


Рис. 168

Докажем обратное утверждение (признак прямоугольника).

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD равны (см. рис. 168). Треугольники ABD и DCA равны по трём сторонам ($AB = DC$, $BD = CA$, AD — общая сторона). Отсюда следует, что $\angle A = \angle D$. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Таким образом, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Параллелограмм — выпуклый четырёхугольник, поэтому $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, т. е. параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

47 Ромб и квадрат

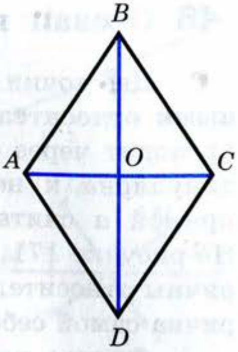


Рис. 169

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Наряду с ними ромб обладает особым свойством. Рассмотрим его.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 169). Требуется доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и каждая диагональ делит соответствующие углы ромба пополам. Докажем, например, что $\angle BAC = \angle DAC$.

По определению ромба все его стороны равны, в частности $AB = AD$, поэтому треугольник BAD равнобедренный. Так как ромб является параллелограммом, то его диагонали точкой O пересечения делятся пополам. Следовательно, отрезок AO — медиана равнобедренного треугольника BAD, проведённая к основанию, а значит, высота и биссектриса этого треугольника. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, что и требовалось доказать.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Прямоугольник является параллелограммом, поэтому и квадрат является параллелограммом, у которого все стороны равны, т. е. ромбом. Отсюда следует, что квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Сформулируем основные свойства квадрата.

а)

б)

Свойства квадрата

Рис. 170

1. Все углы квадрата прямые (рис. 170, *а*).
2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам (рис. 170, *б*).

48 Осевая и центральная симметрии

Две точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой a**, если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему (рис. 171, *а*). Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе. На рисунке 171, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно прямой b, а точка P симметрична самой себе относительно этой прямой.

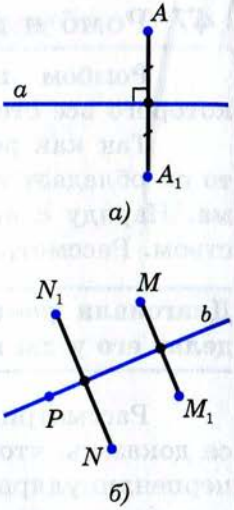


Рис. 171

Фигура называется симметричной относительно прямой a, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой a также принадлежит этой фигуре. Прямая a называется **осью симметрии фигуры.** Говорят также, что фигура обладает осевой симметрией.

Приведём примеры фигур, обладающих осевой симметрией (рис. 172). У неразвёрнутого угла одна ось симметрии — прямая, на которой расположена биссектриса угла. Равнобедренный (но не равносторонний) треугольник имеет также одну ось симметрии, а равносторонний треугольник — три оси симметрии. Прямоугольник и ромб, не являющиеся квадратами, имеют по две оси симметрии, а квадрат — четыре оси симметрии. У окружности их бесконечно много — любая прямая, проходящая через её центр, является осью симметрии.

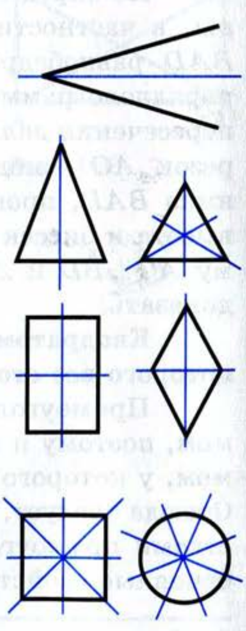

Фигуры, обладающие осевой симметрией

Рис. 172

Имеются фигуры, у которых нет ни одной оси симметрии. К таким фигурам относятся параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба, разносторонний треугольник.

Две точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки O**, если O — середина отрезка AA_1 (рис. 173, *а*). Точка O считается симметричной самой себе. На рисунке 173, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно точки O, а точки P и Q не симметричны относительно этой точки.

Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигу-

ры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется **центром симметрии фигуры.** Говорят также, что фигура обладает центральной симметрией.

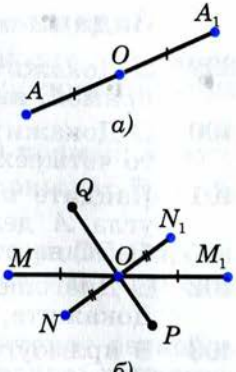
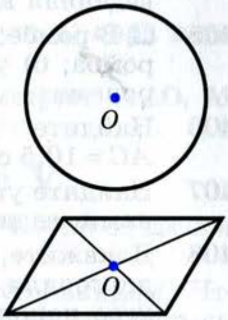


Рис. 173

Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются окружность и параллелограмм (рис. 174). Центром симметрии окружности является центр окружности, а центром симметрии параллелограмма — точка пересечения его диагоналей. Прямая также обладает центральной симметрией, однако в отличие от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии (точка O на рисунке 174), у прямой их бесконечно много — любая точка прямой является её центром симметрии. Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является произвольный треугольник.



Фигуры, обладающие центральной симметрией

Рис. 174

Изображения на плоскости многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии или центр симметрии. Многие листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно среднего стебля (рис. 175).

С симметрией мы часто встречаемся в искусстве, архитектуре, технике, быту. Так, фасады многих зданий обладают осевой симметрией (рис. 176). В большинстве случаев симметричны относительно оси или центра узоры на коврах, тканях, комнатных обоях. Симметричны многие детали механизмов, например зубчатые колёса.

Рис. 175

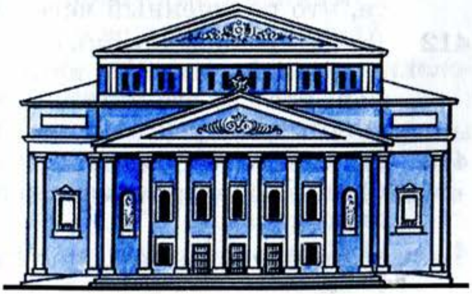


Рис. 176

Задачи

399 Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником.

400 Докажите, что если в четырёхугольнике все углы прямые, то четырёхугольник — прямоугольник.

401 Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектриса угла A делит сторону: а) BC на отрезки 45,6 см и 7,85 см; б) DC на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм.

402 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные.

403 В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOB, если $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ см.

404 Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

405 В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.

406 Найдите периметр ромба $ABCD$, в котором $\angle B = 60°$, $AC = 10{,}5$ см.

407 Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45°.

408 Докажите, что параллелограмм является ромбом, если: а) его диагонали взаимно перпендикулярны; б) диагональ делит его угол пополам.

409 Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

410 Является ли четырёхугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?

411 В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырёхугольник — квадрат.

412 Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, катетом $AC = 12$ см и квадрат $CDEF$, такой, что две его стороны лежат на катетах, а вершина E — на гипотенузе треугольника. Найдите периметр квадрата.

413 Постройте прямоугольник: а) по двум смежным сторонам; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями.

414 Постройте ромб: а) по двум диагоналям; б) по стороне и углу.

415 Постройте квадрат: а) по стороне; б) по диагонали.

416 Даны две точки A и B, симметричные относительно некоторой прямой, и точка M. Постройте точку, симметричную точке M относительно той же прямой.

417 Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) луч?

418 Какие из следующих букв имеют ось симметрии: **А, Б, Г, Е, О, F**?

419 Докажите, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

420 Докажите, что прямая, содержащая биссектрису равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии треугольника.

421 Даны точки A, B и M. Постройте точку, симметричную точке M относительно середины отрезка AB.

422 Имеют ли центр симметрии: а) отрезок; б) луч; в) пара пересекающихся прямых; г) квадрат?

423 Какие из следующих букв имеют центр симметрии: **А, О, М, Х, К**?

Вопросы для повторения к главе V

1 Объясните, какая фигура называется ломаной. Что такое звенья, вершины и длина ломаной?

2 Объясните, какая ломаная называется многоугольником. Что такое вершины, стороны, периметр и диагонали многоугольника?

3 Какой многоугольник называется выпуклым? Объясните, какие углы называются углами выпуклого многоугольника.

4 Выведите формулу для вычисления суммы углов выпуклого n-угольника.

5 Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

6 Начертите четырёхугольник и покажите его диагонали, противоположные стороны и противоположные вершины.

7 Чему равна сумма углов выпуклого четырёхугольника?

8 Дайте определение параллелограмма. Является ли параллелограмм выпуклым четырёхугольником?

9 Докажите, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

10 Докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

11 Сформулируйте и докажите утверждения о признаках параллелограмма.

12 Какой четырёхугольник называется трапецией? Как называются стороны трапеции?

13 Какая трапеция называется равнобедренной? прямоугольной?

14 Какой четырёхугольник называется прямоугольником? Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

15 Докажите, что если в параллелограмме диагонали равны, то параллелограмм является прямоугольником.

16 Какой четырёхугольник называется ромбом? Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

17 Какой четырёхугольник называется квадратом? Перечислите основные свойства квадрата.

18 Какие две точки называются симметричными относительно данной прямой?

19 Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой?

20 Какие две точки называются симметричными относительно данной точки?

21 Какая фигура называется симметричной относительно данной точки?

22 Приведите примеры фигур, обладающих: а) осевой симметрией; б) центральной симметрией; в) и осевой, и центральной симметрией.

Дополнительные задачи

424 Докажите, что если не все углы выпуклого четырёхугольника равны друг другу, то хотя бы один из них тупой.

425 Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 46 см, $AB = 14$ см. Какую сторону параллелограмма пересекает биссектриса угла A? Найдите отрезки, которые образуются при этом пересечении.

426 Стороны параллелограмма равны 10 см и 3 см. Биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три отрезка. Найдите эти отрезки.

427 Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Докажите, что периметр получившегося четырёхугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

428 В параллелограмме, смежные стороны которого не равны, проведены биссектрисы углов. Докажите, что при их пересечении образуется прямоугольник.

429 Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если сумма углов, прилежащих к каждой из двух смежных сторон, равна 180°.

430 Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если его противоположные углы попарно равны.

431 Точка K — середина медианы AM треугольника ABC. Прямая BK пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AD = \frac{1}{3}AC$.

432 Точки M и N — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AN и MC делят диагональ BD на три равные части.

433 Из вершины B ромба $ABCD$ проведены перпендикуляры BK и BM к прямым AD и DC. Докажите, что луч BD является биссектрисой угла KBM.

434 Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

435 Докажите, что середина отрезка, соединяющего вершину треугольника с любой точкой противоположной стороны, лежит на отрезке с концами в серединах двух других сторон.

436 Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 18,4 см. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой AC, пересекает прямые BC и CD соответственно в точках M и N. Найдите MN.

437 На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $AM = AB$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная к прямой AC и пересекающая BC в точке H. Докажите, что $BH = HM = MC$.

438 В трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием AD диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD, $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите AD, если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D = 60°$.

439* ☐ Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

440* ☐ На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

441 Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

442 Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

443 Сколько центров симметрии имеет пара параллельных прямых?

444* ☐ Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры.

Глава VI

Площадь

Что такое площадь комнаты и как её вычислить, если пол в комнате имеет форму прямоугольника, понятно каждому. В этой главе речь пойдёт об измерении площадей многоугольников и будут выведены формулы, по которым можно вычислить площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции. Эти формулы нужны не только в геометрии, но и в практической деятельности. Кроме того, используя формулы площадей, мы докажем одну из важнейших и самых знаменитых теорем геометрии — теорему Пифагора.

§1 Площадь многоугольника

49 Понятие площади многоугольника

Понятие площади нам известно из повседневного опыта. Каждый понимает смысл слов: площадь комнаты равна шестнадцати квадратным метрам, площадь садового участка — восьми соткам и т. д. В этой главе мы рассмотрим вопрос о площадях многоугольников.

Можно сказать, что площадь многоугольника — это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник. Измерение площадей проводится с помощью выбранной единицы измерения аналогично измерению длин отрезков. За единицу измерения площадей принимают квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. Так, если за единицу измерения отрезков принят сантиметр, то за единицу измерения площадей принимают квадрат со стороной 1 см. Такой квадрат называется **квадратным сантиметром** и обозначается см^2. Аналогично определяется **квадратный метр** (м^2), **квадратный миллиметр** (мм^2) и т. д.

При выбранной единице измерения площадей площадь каждого многоугольника выражается положительным числом. Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в данном многоугольнике. Рассмотрим примеры. На рисунке 177, *а* изображён прямоугольник, в котором квадратный сантиметр укладывается ровно 6 раз. Это означает, что площадь прямоугольника равна 6 см².

В трапеции $ABCD$, изображённой на рисунке 177, *б*, квадратный сантиметр укладывается два раза и остаётся часть трапеции — треугольник CDE, в котором квадратный сантиметр не укладывается целиком. Для измерения площади этого треугольника нужно использовать доли квадратного сантиметра, например квадратный миллиметр. Он составляет 0,01 часть квадратного сантиметра. Это показано на рисунке 177, *в*, где квадратный сантиметр разбит на 100 квадратных миллиметров (этот рисунок, а также рисунок 177, *г* для большей наглядности даны в увеличенном масштабе).

На рисунке 177, *г* видно, что квадратный миллиметр укладывается в треугольнике CDE 14 раз, и остаётся часть этого треугольника (она закрашена на рисунке), в которой квадратный миллиметр не укладывается целиком. Поэтому можно сказать, что площадь трапеции $ABCD$ приближённо равна 2,14 см².

Оставшуюся часть треугольника CDE можно измерить с помощью более мелкой доли квадратного сантиметра и получить более точное значение площади трапеции.

Описанный процесс измерения можно продолжить далее, однако на практике он неудобен.

Обычно измеряют лишь некоторые связанные с многоугольником отрезки, а затем вычисляют площадь по определённым формулам.

Вывод этих формул основан на свойствах площадей, которые мы сейчас рассмотрим.

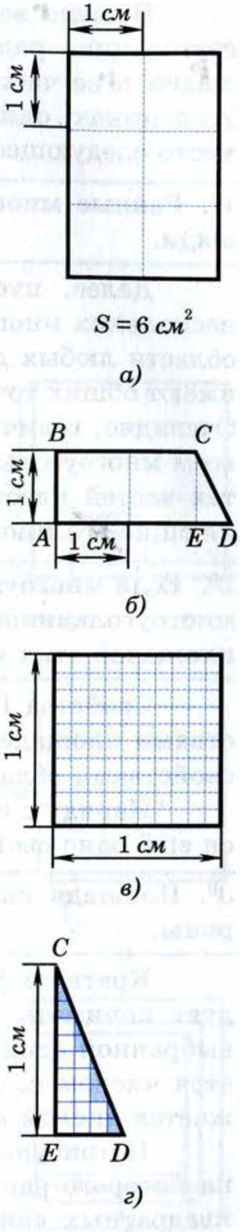


Рис. 177

Прежде всего отметим, что если два многоугольника равны, то единица измерения площадей и её части укладываются в таких многоугольниках одинаковое число раз, т. е. имеет место следующее свойство:

1⁰. Равные многоугольники имеют равные площади.

Далее, пусть многоугольник составлен из нескольких многоугольников так, что внутренние области любых двух из этих многоугольников не имеют общих точек, как показано на рисунке 178. Очевидно, величина части плоскости, занимаемой всем многоугольником, является суммой величин тех частей плоскости, которые занимают составляющие его многоугольники. Итак:

2⁰. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Свойства 1⁰ и 2⁰ называют **основными свойствами площадей**. Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков.

Наряду с этими свойствами нам понадобится ещё одно свойство площадей.

3⁰. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Краткую формулировку этого свойства следует понимать так: если сторона квадрата при выбранной единице измерения отрезков выражается числом a, то площадь этого квадрата выражается числом a^2.

На рисунке 179 изображён квадрат, сторона которого равна 2,1 см. Он состоит из четырёх квадратных сантиметров и сорока одного квадратного миллиметра. Таким образом, площадь квадрата равна 4,41 см², что равно квадрату его стороны: $4{,}41 = (2{,}1)^2$. Доказательство утверждения 3⁰ приведено в следующем пункте.

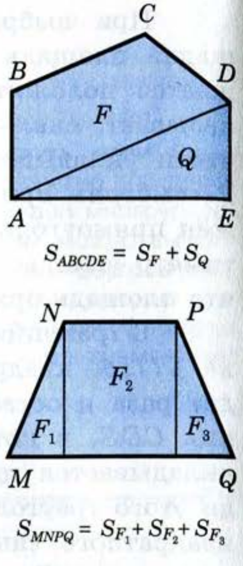


Рис. 178

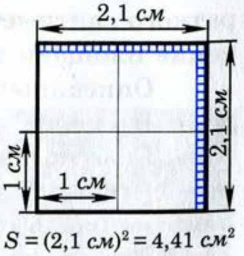


Рис. 179

Если площади двух многоугольников равны, то эти многоугольники называются **равновеликими**. Если один многоугольник разрезан на несколько многоугольников и из них составлен другой многоугольник, то такие многоугольники называются **равносоставленными**. Например, прямоугольник со сторонами, равными 2 см и 3 см (см. рис. 177, *а*), равносоставлен с прямоугольником со сторонами, равными 1 см и 6 см. Ясно, что любые два равносоставленных многоугольника равновеликие (см. основные свойства площадей). Оказывается, что верно и обратное утверждение: если два многоугольника равновеликие, то они равносоставленные. Это утверждение называется теоремой Бойяи — Гервина. Венгерский математик Ф. Бойяи доказал эту теорему в 1832 г., а немецкий математик-любитель П. Гервин независимо от Ф. Бойяи доказал её в 1833 г.

50* Площадь квадрата

Докажем, что площадь S квадрата со стороной a равна a^2.

Начнём с того случая, когда $a = \frac{1}{n}$, где n — целое число. Возьмём квадрат со стороной 1 и разобьём его на n^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, *а* (на этом рисунке $n = 5$). Так как площадь большого квадрата равна 1, то площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Сторона каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n}$, т. е. равна a. Итак,

$$S = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2. \qquad (1)$$

Пусть теперь число a представляет собой конечную десятичную дробь, содержащую n знаков после запятой (в частности, число a может быть целым, и тогда $n = 0$). Тогда число $m = a \cdot 10^n$ целое. Разобьём данный квадрат со стороной a на

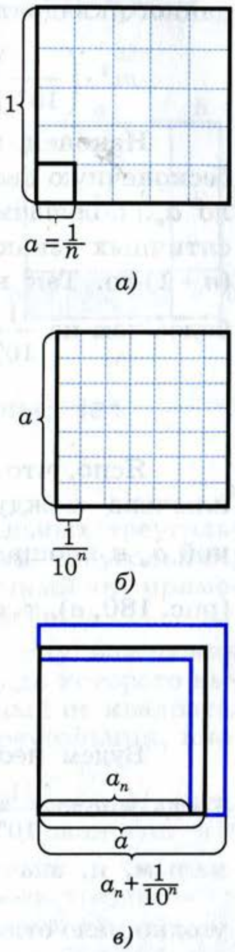


Рис. 180

m^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 180, *б* (на этом рисунке $m = 7$).

При этом каждая сторона данного квадрата разобьётся на m равных частей, и, значит, сторона любого маленького квадрата равна

$$\frac{a}{m} = \frac{a}{a \cdot 10^n} = \frac{1}{10^n}.$$

По формуле (1) площадь маленького квадрата равна $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$. Следовательно, площадь S данного квадрата равна

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{m}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot 10^n}{10^n}\right)^2 = a^2.$$

Наконец, пусть число a представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим число a_n, получаемое из a отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n+1)$-го. Так как число a отличается от a_n не более чем на $\frac{1}{10^n}$, то $a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}$, откуда

$$a_n^2 \leqslant a^2 \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (2)$$

Ясно, что площадь S данного квадрата заключена между площадью квадрата со стороной a_n и площадью квадрата со стороной $a_n + \frac{1}{10^n}$ (рис. 180, *в*), т. е. между a_n^2 и $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$:

$$a_n^2 \leqslant S \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (3)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и, значит, число $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ будет сколь угодно мало отличаться от числа a_n^2. Поэтому из неравенств (2) и (3) следует, что число S сколь угодно мало отличается от числа a^2. Следовательно, эти числа равны: $S = a^2$, что и требовалось доказать.

51 Площадь прямоугольника

Теорема

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство

Рассмотрим прямоугольник со сторонами a, b и площадью S (рис. 181, *а*). Докажем, что $S = ab$.

Достроим прямоугольник до квадрата со стороной $a + b$, как показано на рисунке 181, *б*. По свойству 3^0 площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$.

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью S, равного ему прямоугольника с площадью S (свойство 1^0 площадей) и двух квадратов с площадями a^2 и b^2 (свойство 3^0 площадей). По свойству 2^0 имеем:

$$(a + b)^2 = S + S + a^2 + b^2, \text{ или}$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2.$$

Отсюда получаем: $S = ab$. **Теорема доказана.**

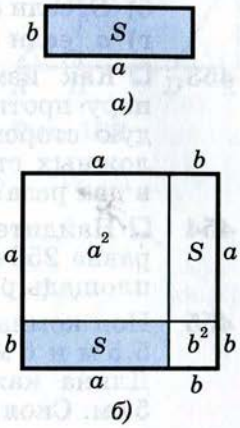


Рис. 181

Задачи

445 Вырежите из бумаги два равных прямоугольных треугольника и составьте из них: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм, отличный от прямоугольника. Сравните площади полученных фигур.

446 Начертите квадрат и примите его за единицу измерения площадей. Далее начертите: а) квадрат, площадь которого выражается числом 4; б) прямоугольник, отличный от квадрата, площадь которого выражается числом 4; в) треугольник, площадь которого выражается числом 2.

447 Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте точку M, симметричную точке D относительно точки C. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

448 На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N, причём точка M — середина отрезка AE. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

449 Найдите площадь квадрата, если его сторона равна: а) 1,2 см; б) $\frac{3}{4}$ дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

450 Найдите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 16 см²; б) 2,25 дм²; в) 12 м².

451 Площадь квадрата равна 24 см². Выразите площадь этого квадрата: а) в квадратных миллиметрах; б) в квадратных дециметрах.

452 Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь. Вычислите: а) S, если $a = 8{,}5$ см, $b = 3{,}2$ см; б) S, если $a = 2\sqrt{2}$ см, $b = 3$ см; в) b, если $a = 32$ см, $S = 684{,}8$ см²; г) a, если $b = 4{,}5$ см, $S = 12{,}15$ см².

453 □ Как изменится площадь прямоугольника, если: а) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза; б) каждую сторону увеличить в два раза; в) одну пару противоположных сторон увеличить в два раза, а другую — уменьшить в два раза?

454 □ Найдите стороны прямоугольника, если: а) его площадь равна 250 см², а одна сторона в 2,5 раза больше другой; б) его площадь равна 9 м², а периметр равен 12 м.

455 Пол комнаты, имеющий форму прямоугольника со сторонами 5,5 м и 6 м, нужно покрыть паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета равна 30 см, а ширина — 5 см. Сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?

456 Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см, чтобы облицевать ими стену, имеющую форму прямоугольника со сторонами 3 м и 2,7 м?

457 Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со смежными сторонами 8 м и 18 м.

458 Два участка земли огорожены заборами одинаковой длины. Первый участок имеет форму прямоугольника со сторонами 220 м и 160 м, а второй имеет форму квадрата. Площадь какого участка больше и на сколько?

§2 Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

52 Площадь параллелограмма

Условимся одну из сторон параллелограмма называть **основанием**, а перпендикуляр, проведённый из любой точки противоположной сторороны к прямой, содержащей основание, — **высотой параллелограмма.**

Теорема

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Доказательство

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ с площадью S. Примем сторону AD за основание и проведём высоты BH и CK (рис. 182). Докажем, что $S = AD \cdot BH$.

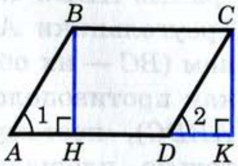


Рис. 182

Докажем сначала, что площадь прямоугольника $HBCK$ также равна S. Трапеция $ABCK$ составлена из параллелограмма $ABCD$ и треугольника DCK. С другой стороны, она составлена из прямоугольника $HBCK$ и треугольника ABH. Но прямоугольные треугольники DCK и ABH равны по гипотенузе и острому углу (их гипотенузы AB и CD равны как противоположные стороны параллелограмма, а углы 1 и 2 равны как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD), поэтому их площади равны.

Следовательно, площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBCK$ также равны, т. е. площадь прямоугольника $HBCK$ равна S. По теореме о площади прямоугольника $S = BC \cdot BH$, а так как $BC = AD$, то $S = AD \cdot BH$. **Теорема доказана.**

53 Площадь треугольника

Одну из сторон треугольника часто называют его **основанием**. Если основание выбрано, то под словом «высота» подразумевают высоту треугольника, проведённую к основанию.

Теорема

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Доказательство

Пусть S — площадь треугольника ABC (рис. 183). Примем сторону AB за основание треугольника и проведём высоту CH. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH.$$

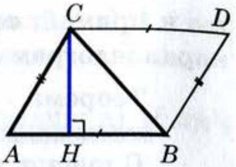


Рис. 183

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке 183. Треугольники ABC и DCB равны по трём сторонам (BC — их общая сторона, $AB = CD$ и $AC = BD$ как противоположные стороны параллелограмма $ABDC$), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$, т. е. $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$. **Теорема доказана.**

Следствие 1

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие 2

Если высоты двух треугольников равны, то и площади относятся как основания.

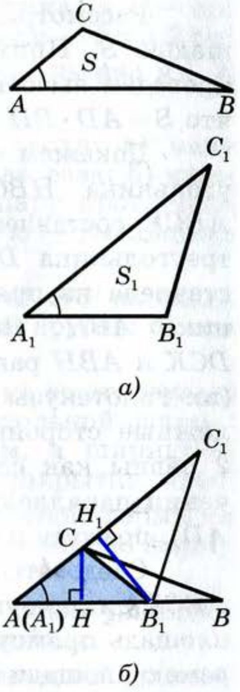


Рис. 184

Воспользуемся следствием 2 для доказательства теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Теорема

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Доказательство

Пусть S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$ (рис. 184, *а*). Докажем, что

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

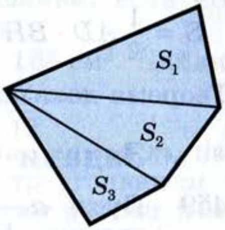
Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 наложились соответственно на лучи AB и AC (рис. 184, *б*). Треугольники ABC и AB_1C имеют общую высоту CH, поэтому $\frac{S}{S_{AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1}$. Треугольники AB_1C и AB_1C_1 также имеют общую высоту — B_1H_1, поэтому $\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}$. Перемножая полученные равенства, находим:

$$\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}, \text{ или } \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

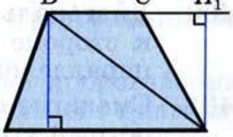
Теорема доказана.

54 Площадь трапеции

Для вычисления площади произвольного многоугольника обычно поступают так: разбивают многоугольник на треугольники и находят площадь каждого треугольника. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника (рис. 185, *а*). Используя этот приём, выведем формулу для вычисления площади трапеции. Условимся называть **высотой трапеции** перпендикуляр, проведённый из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание. На рисунке 185, *б* отрезок BH (а также отрезок DH_1) — высота трапеции $ABCD$.



а)



б)

Рис. 185

Теорема

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

Доказательство

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S (см. рис. 185, *б*).

Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Диагональ BD разделяет трапецию на два треугольника ABD и BCD, поэтому $S = S_{ABD} + S_{BCD}$. Примем отрезки AD и BH за основание и высоту треугольника ABD, а отрезки BC и DH_1 за основание и высоту треугольника BCD. Тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH, \ S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DH_1.$$

Так как $DH_1 = BH$, то $S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot BH$.

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2} AD \cdot BH + \frac{1}{2} BC \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Теорема доказана.

Задачи

459 Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь параллелограмма. Найдите: а) S, если $a = 15$ см, $h = 12$ см; б) a, если $S = 34$ см^2, $h = 8{,}5$ см; в) a, если $S = 162$ см^2, $h = \frac{1}{2}a$; г) h, если $h = 3a$, $S = 27$.

460 Диагональ параллелограмма, равная 13 см, перпендикулярна к стороне параллелограмма, равной 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

461 Смежные стороны параллелограмма равны 12 см и 14 см, а его острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

462 Сторона ромба равна 6 см, а один из углов равен 150°. Найдите площадь ромба.

463 Сторона параллелограмма равна 8,1 см, а диагональ, равная 14 см, образует с ней угол в 30°. Найдите площадь параллелограмма.

464 Пусть a и b — смежные стороны параллелограмма, S — площадь, а h_1 и h_2 — его высоты. Найдите: а) h_2, если $a = 18$ см, $b = 30$ см, $h_1 = 6$ см, $h_2 > h_1$; б) h_1, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $h_2 = 6$ см, $h_2 > h_1$; в) h_1 и h_2, если $S = 54$ см^2, $a = 4{,}5$ см, $b = 6$ см.

465 Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведённые из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

466 Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найдите площадь параллелограмма, если бóльшая его сторона равна 15,2 см, а один из его углов 45°.

467 Квадрат и ромб, не являющийся квадратом, имеют одинаковые периметры. Сравните площади этих фигур.

468 Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь треугольника. Найдите: а) S, если $a = 7$ см, $h = 11$ см; б) S, если $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 5$ см; в) h, если $S = 37{,}8$ см², $a = 14$ см; г) a, если $S = 12$ см², $h = 3\sqrt{2}$ см.

469 Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 16 см и 22 см, а высота, проведённая к стороне AB, равна 11 см. Найдите высоту, проведённую к стороне BC.

470 Две стороны треугольника равны 7,5 см и 3,2 см. Высота, проведённая к большей стороне, равна 2,4 см. Найдите высоту, проведённую к меньшей из данных сторон.

471 ☐ Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 11 см; б) 1,2 дм и 3 дм.

472 Площадь прямоугольного треугольника равна 168 см². Найдите его катеты, если отношение их длин равно $\frac{7}{12}$.

473 Через вершину C треугольника ABC проведена прямая m, параллельная стороне AB. Докажите, что все треугольники с вершинами на прямой m и основанием AB имеют равные площади.

474 Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой.

475 ☐ Начертите треугольник ABC. Через вершину A проведите две прямые так, чтобы они разделили этот треугольник на три треугольника, имеющие равные площади.

476 Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Вычислите площадь ромба, если его диагонали равны: а) 3,2 дм и 14 см; б) 4,6 дм и 2 дм.

477 Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27 см².

478 В выпуклом четырёхугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей.

479 Точки D и E лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC. Найдите: а) S_{ADE}, если $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $AD = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10$ см²; б) AD, если $AB = 8$ см, $AC = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10$ см², $S_{ADE} = 2$ см².

480 Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если:
а) $AB = 21$ см, $CD = 17$ см, высота BH равна 7 см;
б) $\angle D = 30°$, $AB = 2$ см, $CD = 10$ см, $DA = 8$ см;
в) $BC \perp AB$, $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $CD = 13$ см.

481 Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6 см, а больший угол равен 135°.

482 Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведённая из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.

§3 Теорема Пифагора

55 Теорема Пифагора

Пользуясь свойствами площадей многоугольников, мы установим теперь замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника.

Теорема, которую мы докажем, называется **теоремой Пифагора.** Она является важнейшей теоремой геометрии.

Теорема

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 186, a). Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$ так, как показано на рисунке 186, б. Площадь S этого квадрата равна $(a + b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырёх равных прямоугольных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной c, поэтому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2.$$

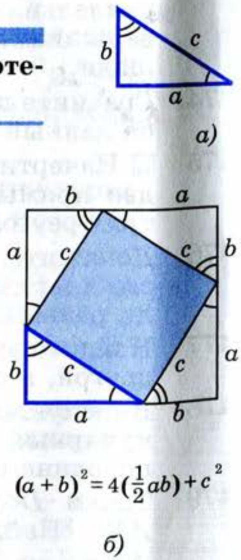


Рис. 186

Таким образом, $(a+b)^2 = 2ab + c^2$, откуда

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема доказана.

Интересна история теоремы Пифагора. Хотя эта теорема и связывается с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до Пифагора. Возможно, что тогда ещё не знали её доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путем на основе измерений. Пифагор, по-видимому, нашёл доказательство этого соотношения. Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву богам быка, по другим свидетельствам — даже сто быков. На протяжении последующих веков были найдены различные другие доказательства теоремы Пифагора. В настоящее время их насчитывается более ста. С одним из них мы уже познакомились, ещё с одним познакомимся в следующей главе (задача **578**). Многие известные мыслители и писатели прошлого обращались к этой замечательной теореме и посвятили ей свои строки.

Пифагор — древнегреческий учёный (VI в. до н. э.)

56 Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Докажем, что угол C прямой. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, у которого $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$. По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, и, значит,

$A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$. Но $AC^2 + BC^2 = AB^2$ по условию теоремы. Следовательно, $A_1B_1^2 = AB^2$, откуда $A_1B_1 = AB$.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам, поэтому $\angle C = \angle C_1$, т. е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. **Теорема доказана.**

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным: $5^2 = 3^2 + 4^2$. Прямоугольными являются также треугольники со сторонами 5, 12, 13; 8, 15, 17 и 7, 24, 25 (объясните почему).

Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называются **пифагоровыми треугольниками.** Можно доказать, что катеты a, b и гипотенуза c таких треугольников выражаются формулами $a = 2k \cdot m \cdot n$, $b = k\,(m^2 - n^2)$, $c = k\,(m^2 + n^2)$, где k, m и n — любые натуральные числа, такие, что $m > n$.

Треугольник со сторонами 3, 4, 5 часто называют **египетским треугольником,** так как он был известен ещё древним египтянам. Для построения прямых углов египтяне поступали так: на верёвке делали метки, делящие её на 12 равных частей, связывали концы верёвки и растягивали на земле с помощью кольев в виде треугольника со сторонами 3, 4 и 5. Тогда угол между сторонами, равными 3 и 4, оказывался прямым.

57 Формула Герона

Теорема

Площадь S треугольника со сторонами a, b, c выражается формулой $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. В любом треугольнике по крайней мере два угла острые. Пусть A и B — острые углы треугольника ABC. Тогда основание H высоты CH треугольника лежит на стороне AB. Введём обозначения: $CH=h$, $AH=y$, $HB=x$ (рис. 187). По теореме Пифагора $a^2-x^2=h^2=b^2-y^2$, откуда $y^2-x^2=b^2-a^2$, или $(y-x)(y+x)=b^2-a^2$. Так как $y+x=c$, то $y-x=\frac{1}{c}(b^2-a^2)$. Сложив два последних равенства и разделив на 2, получим:

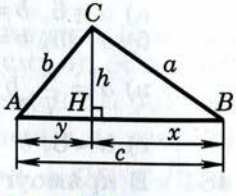


Рис. 187

$$y=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

Поэтому

$$h^2=b^2-y^2=(b+y)(b-y)=$$

$$=\left(b+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)=$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2c}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2c}=$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}=$$

$$=\frac{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{4c^2}=$$

$$=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}.$$

Следовательно, $h=\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$.

Но $S=\frac{1}{2}hc$, откуда и получаем:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Теорема доказана.

Выведенную нами формулу обычно называют формулой Герона, по имени древнегреческого математика Герона Александрийского, жившего предположительно в I в. н. э.

Задачи

483 ☐ Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам a и b:
а) $a=6$, $b=8$;
б) $a=5$, $b=6$;
в) $a=\frac{3}{7}$, $b=\frac{4}{7}$;
г) $a=8$, $b=8\sqrt{3}$.

484 В прямоугольном треугольнике a и b — катеты, c — гипотенуза. Найдите b, если:
а) $a=12$, $c=13$;
б) $a=7$, $c=9$;
в) $a=12$, $c=2b$;
г) $a=2\sqrt{3}$, $c=2b$;
д) $a=3b$, $c=2\sqrt{10}$.

485 Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 60°, если гипотенуза равна c.

486 В прямоугольнике $ABCD$ найдите:
а) AD, если $AB=5$, $AC=13$;
б) BC, если $CD=1,5$, $AC=2,5$;
в) CD, если $BD=17$, $BC=15$.

487 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а основание равно 16 см. Найдите высоту, проведённую к основанию.

488 Найдите: а) высоту равностороннего треугольника, если его сторона равна 6 см; б) сторону равностороннего треугольника, если его высота равна 4 см.

489 Докажите, что площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Найдите площадь равностороннего треугольника, если его сторона равна:
а) 5 см; б) 1,2 см; в) $2\sqrt{2}$ дм.

490 Найдите боковую сторону и площадь равнобедренного треугольника, если: а) основание равно 12 см, а высота, проведённая к основанию, равна 8 см; б) основание равно 18 см, а угол, противолежащий основанию, равен 120°; в) треугольник прямоугольный и высота, проведённая к гипотенузе, равна 7 см.

491 ☐ По данным катетам a и b прямоугольного треугольника найдите высоту, проведённую к гипотенузе:
а) $a=5$, $b=12$; б) $a=12$, $b=16$.

492 Найдите высоты треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 12 см.

493 Найдите сторону и площадь ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.

494 Найдите диагональ и площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а другая диагональ — 12 см.

495 Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если: а) $AB = 10$ см, $BC = DA = 13$ см, $CD = 20$ см; б) $\angle C = \angle D = 60°$, $AB = BC = 8$ см; в) $\angle C = \angle D = 45°$, $AB = 6$ см, $BC = 9\sqrt{2}$ см.

496 Основание D высоты CD треугольника ABC лежит на стороне AB, причём $AD = BC$. Найдите AC, если $AB = 3$, а $CD = \sqrt{3}$.

497 Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность смежных сторон равна 1 см.

498 Выясните, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражаются числами: а) 6, 8, 10; б) 5, 6, 7; в) 9, 12, 15; г) 10, 24, 26; д) 3, 4, 6; е) 11, 9, 13; ж) 15, 20, 25. В каждом случае ответ обоснуйте.

499 Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами, равными: а) 24 см, 25 см, 7 см; б) 15 см, 17 см, 8 см.

Вопросы для повторения к главе VI

1 Расскажите, как измеряются площади многоугольников.

2 Сформулируйте основные свойства площадей многоугольников.

3 Какие многоугольники называются равновеликими и какие равносоставленными?

4 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади прямоугольника.

5 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади параллелограмма.

6 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади треугольника. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника по его катетам?

7 Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей двух треугольников, имеющих по равному углу.

8 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади трапеции.

9 Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

10 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.

11 Какие треугольники называются пифагоровыми? Приведите примеры пифагоровых треугольников.

12 Какая формула площади треугольника называется формулой Герона? Выведите эту формулу.

Дополнительные задачи

500 Докажите, что площадь квадрата, построенного на катете равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на высоте, проведённой к гипотенузе.

501 Площадь земельного участка равна 27 га. Выразите площадь этого же участка: а) в квадратных метрах; б) в квадратных километрах.

502 Высоты параллелограмма равны 5 см и 4 см, а периметр равен 42 см. Найдите площадь параллелограмма.

503 Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 24 см^2, а точка пересечения диагоналей удалена от сторон на 2 см и 3 см.

504 Меньшая сторона параллелограмма равна 29 см. Перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей к большей стороне, делит её на отрезки, равные 33 см и 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

505 Докажите, что из всех треугольников, у которых одна сторона равна a, а другая — b, наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны.

506 ☐ Как провести две прямые через вершину квадрата, чтобы разделить его на три фигуры, площади которых равны?

507* Каждая сторона одного треугольника больше любой стороны другого треугольника. Следует ли из этого, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

508* ☐ Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки.

509 Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон не зависит от положения этой точки.

510* Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что треугольники CDE и BDF равновеликие.

511 В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD диагонали пересекаются в точке O.
а) Сравните площади треугольников ABD и ACD.
б) Сравните площади треугольников ABO и CDO.
в) Докажите, что выполняется равенство $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

512* Основания трапеции равны a и b. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям, разделяет трапецию на две равновеликие трапеции. Найдите длину этого отрезка.

513 Диагонали ромба равны 18 м и 24 м. Найдите периметр ромба и расстояние между параллельными сторонами.

514 Площадь ромба равна 540 см^2, а одна из его диагоналей равна 4,5 дм. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

515 Найдите площадь равнобедренного треугольника, если: а) боковая сторона равна 20 см, а угол при основании равен 30°; б) высота, проведённая к боковой стороне, равна 6 см и образует с основанием угол в 45°.

516 В треугольнике ABC $BC = 34$ см. Перпендикуляр MN, проведённый из середины BC к прямой AC, делит сторону AC на отрезки $AN = 25$ см и $NC = 15$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

517 Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $CD = 9$ см, $DA = 15$ см, $AC = 12$ см.

518 Найдите площадь равнобедренной трапеции, если: а) её меньшее основание равно 18 см, высота — 9 см и острый угол равен 45°; б) её основания равны 16 см и 30 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

519 Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна h, а диагонали взаимно перпендикулярны.

520 Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а сумма оснований равна $2a$. Найдите площадь трапеции.

521 Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

522 В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 17$ см, $BC = 5$ см и боковой стороной $AB = 10$ см через вершину B проведена прямая, делящая диагональ AC пополам и пересекающая основание AD в точке M. Найдите площадь треугольника BDM.

523 Два квадрата со стороной a имеют одну общую вершину, причём сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

524 Стороны треугольника равны 13 см, 5 см и 12 см. Найдите площадь этого треугольника.

525 Расстояние от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до прямой AB равно 6 см, а до прямой AC равно 2 см. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

526 В ромбе высота, равная $\frac{4\sqrt{2}}{6}$ см, составляет $\frac{2}{3}$ большей диагонали. Найдите площадь ромба.

527 В равнобедренной трапеции диагональ равна 10 см, а высота равна 6 см. Найдите площадь трапеции.

528 В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если боковая сторона CD трапеции равна 12 см, а расстояние от точки O до прямой CD равно 5 см.

529 Диагонали четырёхугольника равны 16 см и 20 см и пересекаются под углом в 30°. Найдите площадь этого четырёхугольника.

530 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC высота AD равна 8 см. Найдите площадь треугольника ABC, если медиана DM треугольника ADC равна 8 см.

531 Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 см и 8 см. Прямая, проходящая через вершину C и перпендикулярная к прямой BD, пересекает сторону AD в точке M, а диагональ BD — в точке K. Найдите площадь четырёхугольника $ABKM$.

532 В треугольнике ABC проведена высота BH. Докажите, что если:

а) угол A острый, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$;

б) угол A тупой, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.

Глава VII

Подобные треугольники

Вокруг нас немало предметов, которые имеют одинаковую форму, но разные размеры. Самый простой пример — большой и маленький мячи. В геометрии фигуры одинаковой формы называются подобными. Данная глава посвящена изучению подобных треугольников и признаков их подобия. Эти признаки широко используются в геометрии, в частности с их помощью будет доказано утверждение, сформулированное ещё при изучении геометрии в 7 классе: медианы треугольника пересекаются в одной точке. Кроме того, будет рассказано об использовании свойств подобных треугольников при проведении измерительных работ на местности.

§1 Определение подобных треугольников

58 Пропорциональные отрезки

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{CD}$.

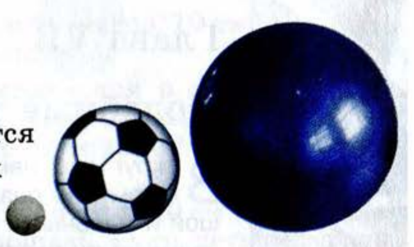
Говорят, что **отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1**, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$. Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, длины которых равны 3 см и 1,5 см. В самом деле,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}.$$

Понятие пропорциональности вводится и для большего числа отрезков. Так, например, три отрезка AB, CD и EF **пропорциональны** трём отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и E_1F_1, если справедливо равенство

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1}.$$

59 Определение подобных треугольников



В повседневной жизни встречаются предметы одинаковой формы, но разных размеров, например футбольный и теннисный мячи, круглая тарелка и большое круглое блюдо. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть подобными. Так, подобными являются любые два квадрата, любые два круга.

Введём понятие подобных треугольников.

Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ углы соответственно равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются **сходственными** (рис. 188).

Определение

Два треугольника называются **подобными,** если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Другими словами, два треугольника подобны, если для них можно ввести обозначения ABC и $A_1B_1C_1$ так, что

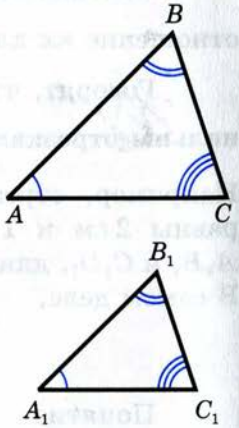
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = C_1, \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k. \qquad (2)$$

Число k, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников, называется **коэффициентом подобия.**

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. На рисунке 188 изображены подобные треугольники.

Оказывается, что подобие треугольников можно установить, проверив только некоторые из равенств (1) и (2). В следующем параграфе мы рассмотрим три признака подобия треугольников.



AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 – сходственные стороны

Рис. 188

60 Отношение площадей подобных треугольников

Теорема

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, причём коэффициент подобия равен k. Обозначим буквами S и S_1 площади этих треугольников. Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (по тереме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, п. 53). По формулам (2) имеем: $\frac{AB}{A_1B_1} = k$, $\frac{AC}{A_1C_1} = k$, поэтому $\frac{S}{S_1} = k^2$.

Теорема доказана.

Задачи

533 Найдите отношение отрезков AB и CD, если их длины равны соответственно 15 см и 20 см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в миллиметрах?

534 Пропорциональны ли изображённые на рисунке 189 отрезки: а) AC, CD и M_1M_2, MM_1; б) AB, BC, CD и MM_2, MM_1, M_1M_2; в) AB, BD и MM_1, M_1M_2?

535 Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Решение

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ (рис. 190). Треугольники ABD и ACD имеют общую

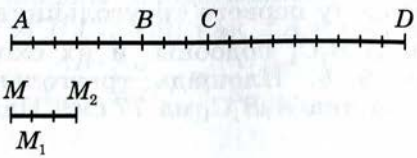


Рис. 189

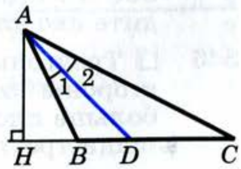


Рис. 190

высоту AH, поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$. С другой стороны, эти же треугольники имеют по равному углу ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$. Из двух равенств для отношения площадей получаем $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, или $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$, что и требовалось доказать.

536 Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC. а) Найдите AB, если $BC = 9$ см, $AD = 7{,}5$ см, $DC = 4{,}5$ см. б) Найдите DC, если $AB = 30$, $AD = 20$, $BC = 16$.

537 Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите BD и DC, если $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см.

538 Биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC на отрезки CD и BD, равные соответственно 4,5 см и 13,5 см. Найдите AB и AC, если периметр треугольника ABC равен 42 см.

539 В треугольник MNK вписан ромб $MDEF$ так, что вершины D, E и F лежат соответственно на сторонах MN, NK и MK. Найдите отрезки NE и EK, если $MN = 7$ см, $NK = 6$ см, $MK = 5$ см.

540 Периметр треугольника CDE равен 55 см. В этот треугольник вписан ромб $DMFN$ так, что вершины M, F и N лежат соответственно на сторонах CD, CE и DE. Найдите стороны CD и DE, если $CF = 8$ см, $EF = 12$ см.

541 Подобны ли треугольники ABC и DEF, если $\angle A = 106°$, $\angle B = 34°$, $\angle E = 106°$, $\angle F = 40°$, $AC = 4{,}4$ см, $AB = 5{,}2$ см, $BC = 7{,}6$ см, $DE = 15{,}6$ см, $DF = 22{,}8$ см, $EF = 13{,}2$ см?

542 В подобных треугольниках ABC и KMN стороны AB и KM, BC и MN являются сходственными. Найдите стороны треугольника KMN, если $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $\frac{KM}{AB} = 2{,}1$.

543 Докажите, что отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведённых к этим сторонам.

544 Площади двух подобных треугольников равны 75 м^2 и 300 м^2. Одна из сторон второго треугольника равна 9 м. Найдите сходственную ей сторону первого треугольника.

545 Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, и их сходственные стороны относятся как $6 : 5$. Площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$ на 77 см^2. Найдите площади треугольников.

546 План земельного участка имеет форму треугольника. Площадь изображённого на плане треугольника равна 87,5 см². Найдите площадь земельного участка, если план выполнен в масштабе 1 : 100 000.

547 Докажите, что отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

548 Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Сходственные стороны BC и B_1C_1 соответственно равны 1,4 м и 56 см. Найдите отношение периметров треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

549 Стороны данного треугольника равны 15 см, 20 см и 30 см. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 26 см.

§2 Признаки подобия треугольников

61 Первый признак подобия треугольников

Теорема

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 191). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

По теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$, и, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

Докажем, что стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$ (см. п. 53).

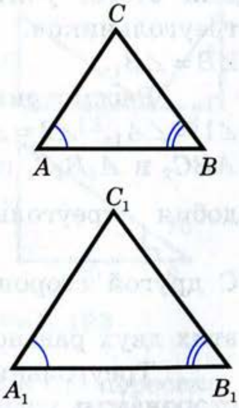


Рис. 191

Из этих равенств следует, что $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$. Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получаем $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1}$.

Итак, стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. **Теорема доказана.**

62 Второй признак подобия треугольников

Теорема

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 192, *а*). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

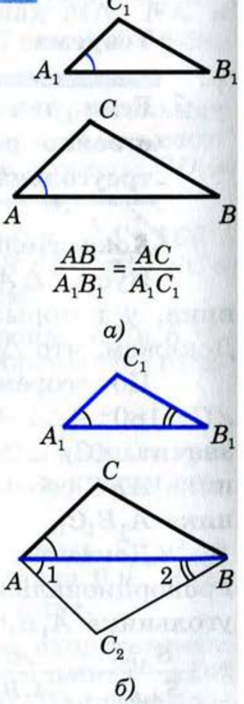


Рис. 192

Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис. 192, *б*). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC_2}{A_1C_1}$. С другой стороны, по условию $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$. Из этих двух равенств получаем $AC = AC_2$.

Треугольники ABC и ABC_2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, $AC = AC_2$ и $\angle A = \angle 1$, поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle 1 = \angle A_1$). Отсюда следует, что $\angle B = \angle 2$, а так как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$. **Теорема доказана.**

63 Третий признак подобия треугольников

Теорема

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Пусть стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}. \qquad (1)$$

Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая второй признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$. Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (см. рис. 192, *б*). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$.

Сравнивая эти равенства с равенствами (1), получаем: $BC = BC_2$, $CA = C_2A$. Треугольники ABC и ABC_2 равны по трём сторонам. Отсюда следует, что $\angle A = \angle 1$, а так как $\angle 1 = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$. **Теорема доказана.**

Задачи

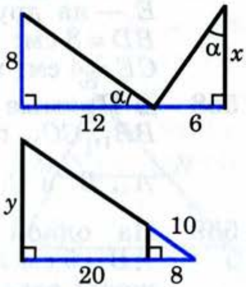


Рис. 193

550 По данным рисунка 193 найдите x и y.

551 На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите: а) EF и FC, если $DE = 8$ см, $EC = 4$ см, $BC = 7$ см, $AE = 10$ см; б) DE и EC, если $AB = 8$ см, $AD = 5$ см, $CF = 2$ см.

552 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. Найдите: а) AB, если $OB = 4$ см, $OD = 10$ см, $DC = 25$ см; б) $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$, если $AB = a$, $DC = b$; в) AO, если $AB = 9{,}6$ дм, $DC = 24$ см, $AC = 15$ см.

553 Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют: а) по равному острому углу; б) по равному тупому углу; в) по прямому углу? Ответ обоснуйте.

554 Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке M. Найдите расстояния от точки M до концов меньшего основания.

555 Точки M, N и P лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, причём $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Найдите стороны четырёхугольника $AMNP$, если: а) $AB = 10$ см, $AC = 15$ см, $PN : MN = 2 : 3$; б) $AM = AP$, $AB = a$, $AC = b$.

556 Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD. Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD (рис. 194).

Решение

Проведём через точку A прямую AC_1, параллельную прямой BD (C_1 — точка пересечения этой прямой с прямой CD). Тогда $\triangle OAB \sim \triangle ACC_1$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle O = \angle CAC_1$, $\angle OAB = \angle C$), следовательно, $\dfrac{OA}{AC} = \dfrac{OB}{AC_1}$. Так как $AC_1 = BD$ (объясните почему), то $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AC}{BD}$, что и требовалось доказать.

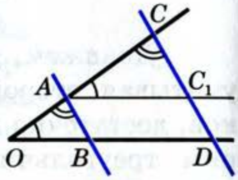


Рис. 194

557 Стороны угла A пересечены параллельными прямыми BC и DE, причём точки B и D лежат на одной стороне угла, а C и E — на другой. Найдите: а) AC, если $CE = 10$ см, $AD = 22$ см, $BD = 8$ см; б) BD и DE, если $AB = 10$ см, $AC = 8$ см, $BC = 4$ см, $CE = 4$ см; в) BC, если $AB : BD = 2 : 1$ и $DE = 12$ см.

558 Прямые a и b пересечены параллельными прямыми AA_1, BB_1, CC_1, причём точки A, B и C лежат на прямой a, а точки A_1, B_1 и C_1 — на прямой b. Докажите, что $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

559 На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AF = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и AFB? Ответ обоснуйте.

560 Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если: а) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $A_1B_1 = 4{,}5$ см, $B_1C_1 = 7{,}5$ см, $C_1A_1 = 10{,}5$ см; б) $AB = 1{,}7$ см, $BC = 3$ см, $CA = 4{,}2$ см, $A_1B_1 = 34$ дм, $B_1C_1 = 60$ дм, $C_1A_1 = 84$ дм?

561 Докажите, что два равносторонних треугольника подобны.

562 В треугольнике ABC сторона AB равна a, а высота CH равна h. Найдите сторону квадрата, вписанного в треугольник ABC так, что две соседние вершины квадрата лежат на стороне AB, а две другие — соответственно на сторонах AC и BC.

563 ☐ Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найдите отношение $\frac{AK}{KC}$, если: а) M — середина отрезка AD; б) $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

§3 Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

64 Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Докажем теорему о средней линии треугольника.

Теорема

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 195). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

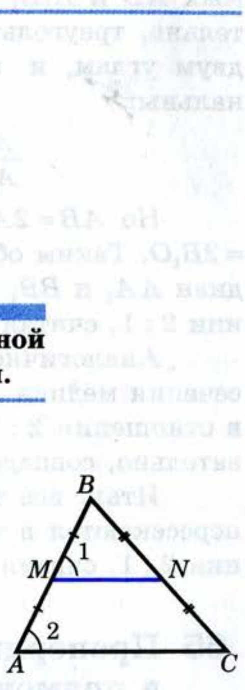


Рис. 195

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ — общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства — что $MN = \frac{1}{2}AC$. **Теорема доказана.**

Пользуясь этой теоремой, решим следующую задачу:

Задача 1

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Решение

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения его медиан AA_1 и BB_1 и проведём среднюю линию A_1B_1 этого треугольника (рис. 196). Отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB, поэтому углы 1 и 2, а также углы 3 и 4 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и A_1B_1 секущими AA_1 и BB_1. Следовательно, треугольники AOB и A_1OB_1 подобны по двум углам, и, значит, их стороны пропорциональны:

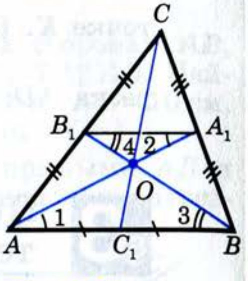


Рис. 196

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Но $AB = 2A_1B_1$, поэтому $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Таким образом, точка O пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O.

Итак, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

65 Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Задача 2

Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

Решение

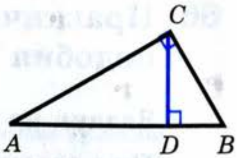


Рис. 197

Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник с прямым углом C, CD — высота, проведённая из вершины C к гипотенузе AB (рис. 197). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

Треугольники ABC и ACD подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle ADC = 90°$). Точно так же подобны треугольники ABC и CBD ($\angle B$ — общий и $\angle ACB = \angle BDC = 90°$), поэтому $\angle A = \angle BCD$. Наконец, треугольники ACD и CBD также подобны по первому признаку подобия (в этих треугольниках углы с вершиной D прямые и $\angle A = \angle BCD$), что и требовалось доказать.

Отрезок XY называется **средним пропорциональным** (или **средним геометрическим**) для отрезков AB и CD, если

$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}.$$

Исходя из задачи 2, докажем следующие утверждения:

1°. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

Действительно, $\triangle ADC \sim \triangle CBD$ (см. рис. 197), поэтому $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, откуда $CD^2 = AD \cdot DB$, следовательно,

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}.$$

2°. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключённого между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.

В самом деле, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (см. рис. 197), поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, и, следовательно,

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$

66 Практические приложения подобия треугольников

Задачи на построение

При решении многих задач на построение треугольников применяют так называемый **метод подобия**. Он состоит в том, что сначала на основании некоторых данных строят треугольник, подобный искомому, а затем, используя остальные данные, строят искомый треугольник.

Рассмотрим пример.

Задача 3

Построить треугольник по данным двум углам и биссектрисе при вершине третьего угла.

Решение

На рисунке 198, *а* изображены два данных угла и данный отрезок. Требуется построить треугольник, у которого два угла соответственно равны двум данным углам, а биссектриса при вершине третьего угла равна данному отрезку.

Сначала построим какой-нибудь треугольник, подобный искомому. Для этого начертим произвольный отрезок A_1B_1 и построим треугольник A_1B_1C, у которого углы A_1 и B_1 соответственно равны данным углам (рис. 198, *б*).

Далее построим биссектрису угла C и отложим на ней отрезок CD, равный данному отрезку. Через точку D проведём прямую, параллельную A_1B_1. Она пересекает стороны угла C в некоторых точках A и B (см. рис. 198, *б*). Треугольник ABC искомый.

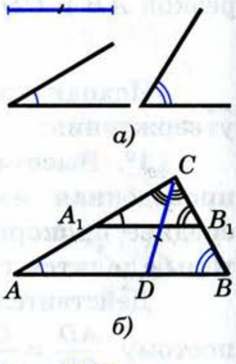


Рис. 198

В самом деле, так как $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, и, следовательно, два угла треугольника ABC соответственно равны данным углам. По построению биссектриса CD треугольника ABC равна данному отрезку. Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Очевидно, задача имеет решение, если сумма двух данных углов меньше 180°. Так как отрезок A_1B_1 можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условию задачи. Все эти треугольники равны друг другу (объясните почему), поэтому задача имеет единственное решение.

Измерительные работы на местности

Свойства подобных треугольников могут быть использованы при проведении различных измерительных работ на местности. Мы рассмотрим две задачи: определение высоты предмета и расстояния до недоступной точки.

Определение высоты предмета. Предположим, что нам нужно определить высоту какого-нибудь предмета, например высоту телеграфного столба A_1C_1, изображённого на рисунке 199. Для этого поставим на некотором расстоянии от столба шест AC с вращающейся планкой и направим планку на верхнюю точку A_1 столба, как показано на рисунке. Отметим на поверхности земли точку B, в которой прямая A_1A пересекается с поверхностью земли. Прямоугольные треугольники A_1C_1B и ACB подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle C_1 = \angle C = 90°$, $\angle B$ — общий). Из подобия треугольников следует: $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC}$, откуда

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC}.$$

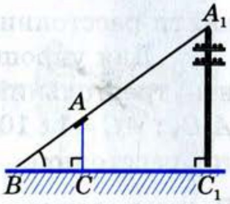


Рис. 199

Измерив расстояния BC_1 и BC и зная длину AC шеста, по полученной формуле определяем высоту A_1C_1 телеграфного столба. Если, например, $BC_1 = 6{,}3$ м, $BC = 2{,}1$ м, $AC = 1{,}7$ м, то $A_1C_1 = \frac{1{,}7 \cdot 6{,}3}{2{,}1} = 5{,}1$ м.

Определение расстояния до недоступной точки. Предположим, что нам нужно найти расстояние от пункта A до недоступного пункта B (рис. 200). Для этого на местности выбираем точку C, провешиваем отрезок AC и измеряем его.

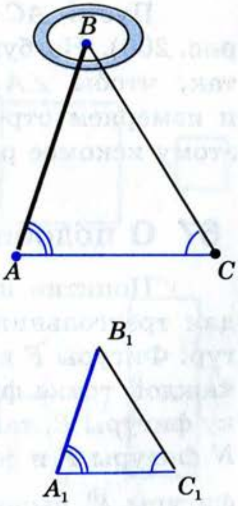


Рис. 200

Затем с помощью астролябии измеряем углы A и C. На листе бумаги строим какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, и измеряем длины сторон A_1B_1 и A_1C_1 этого треугольника. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (по первому признаку подобия треугольников), то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, откуда получаем $AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}$. Эта формула позволяет по известным расстояниям AC, A_1C_1 и A_1B_1 найти расстояние AB.

Для упрощения вычислений удобно построить треугольник $A_1B_1C_1$ таким образом, чтобы $A_1C_1 : AC = 1 : 1000$. Например, если $AC = 130$ м, то расстояние A_1C_1 возьмём равным 130 мм. В этом случае $AB = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot A_1B_1 = 1000 \cdot A_1B_1$, поэтому, измерив расстояние A_1B_1 в миллиметрах, мы сразу получим расстояние AB в метрах.

Пример

Пусть $AC = 130$ м, $\angle A = 73°$, $\angle C = 58°$ (см. рис. 200). На бумаге строим треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_1 = 73°$, $\angle C_1 = 58°$, $A_1C_1 = 130$ мм, и измеряем отрезок A_1B_1. Он равен 153 мм, поэтому искомое расстояние равно 153 м.

67 О подобии произвольных фигур

Понятие подобия можно ввести не только для треугольников, но и для произвольных фигур. Фигуры F и F_1 называются **подобными**, если каждой точке фигуры F можно сопоставить точку фигуры F_1 так, что для любых двух точек M и N фигуры F и сопоставленных им точек M_1 и N_1 фигуры F_1 выполняется равенство $\frac{MN}{M_1N_1} = k$, где

k — одно и то же положительное число для всех точек. При этом предполагается, что каждая точка фигуры F_1 оказывается сопоставленной какой-то точке фигуры F. Число k называется **коэффициентом подобия** фигур F и F_1.

Сопоставление точек подобных фигур хорошо знакомо нам из повседневного опыта. Так, при проектировании киноленты на экран каждой точке изображения на кинокадре сопоставляется точка на экране, причём все расстояния увеличиваются в одинаковое число раз.

На рисунке 201 представлен способ построения фигуры F_1, подобной данной фигуре F. Каждой точке M фигуры F сопоставляется точка M_1 плоскости так, что точки M и M_1 лежат на луче с началом в некоторой фиксированной точке O, причём $OM = k \cdot OM_1$ (на рисунке 201 $k = \frac{1}{3}$). В результате такого сопоставления получается фигура F_1, подобная фигуре F. В этом случае фигуры F и F_1 называются **центрально-подобными**, а само описанное сопоставление называется **центральным подобием** или **гомотетией**.

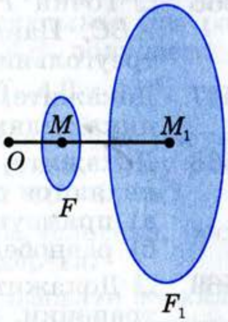


Рис. 201

Можно доказать, что для треугольников общее определение подобия равносильно определению, данному в п. 59.

Примерами подобных четырёхугольников являются любые два квадрата (рис. 202, *а*), а также два прямоугольника, у которых две смежные стороны одного пропорциональны двум смежным сторонам другого (рис. 202, *б*). Примерами подобных фигур произвольной формы являются две географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах, а также фотографии одного и того же предмета, сделанные в разных увеличениях.

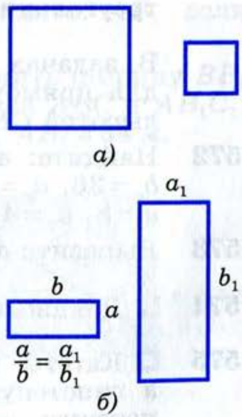


Рис. 202

Замечание

В п. 60 мы доказали, что отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Из этого следует, что такое же утверждение справедливо для двух подобных многоугольников (чтобы доказать это, можно разбить многоугольник на треугольники).

Задачи

564 Дан треугольник, стороны которого равны 8 см, 5 см и 7 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

565 Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его бóльшую сторону, равно 2,5 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

566 Точки P и Q — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника APQ равен 21 см.

567 Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

568 Докажите, что четырёхугольник — ромб, если его вершинами являются середины сторон:
а) прямоугольника;
б) равнобедренной трапеции.

569 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований.

570 Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18 см. Середина M стороны AB соединена с вершиной D. Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком DM.

571 В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABO равна S.

В задачах **572—574** использованы следующие обозначения для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C и высотой CH: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CH = h$, $AH = b_c$, $HB = a_c$.

572 Найдите: а) h, a и b, если $b_c = 25$, $a_c = 16$; б) h, a и b, если $b_c = 36$, $a_c = 64$; в) a, c и a_c, если $b = 12$, $b_c = 6$; г) b, c и b_c, если $a = 8$, $a_c = 4$; д) h, b, a_c и b_c, если $a = 6$, $c = 9$.

573 Выразите a_c и b_c через a, b и c.

574 Докажите, что: а) $h = \frac{ab}{c}$; б) $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$.

575 Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 50 мм. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведённой из вершины прямого угла.

576 Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 11 см больше другого. Найдите гипотенузу, если катеты треугольника относятся как 6 : 5.

577 В треугольнике, стороны которого равны 5 см, 12 см и 13 см, проведена высота к его большей стороне. Найдите отрезки, на которые высота делит эту сторону.

578 Используя утверждение 2^0, п. 65, докажите теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C выполняется равенство $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Решение

Пусть CD — высота треугольника ABC (см. рис. 197). На основании утверждения 2^0, п. 65, имеем $AC = \sqrt{AD \cdot AB}$, или $AC^2 = AD \cdot AB$. Аналогично $BC^2 = BD \cdot AB$. Складывая эти равенства почленно и учитывая, что $AD + BD = AB$, получаем:

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = (AD + BD) \cdot AB = AB^2.$$

579 Для определения высоты столба A_1C_1, изображённого на рисунке 199, использован шест с вращающейся планкой. Чему равна высота столба, если $BC_1 = 6{,}3$ м, $BC = 3{,}4$ м, $AC = 1{,}7$ м?

580 Длина тени дерева равна 10,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,7 м, равна 2,5 м. Найдите высоту дерева.

581 Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, как показано на рисунке 203. Луч света FD, отражаясь от зеркала в точке D, попадает в глаз человека (точку B). Определите высоту дерева, если $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4{,}8$ м, $\angle 1 = \angle 2$.

582 Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B на местности выбрали точку C и измерили отрезок AC, углы BAC и ACB. Затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Найдите AB, если $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6{,}3$ см, $A_1B_1 = 7{,}2$ см.

583 На рисунке 204 показано, как можно определить ширину BB_1 реки, рассматривая два подобных треугольника ABC и AB_1C_1. Определите BB_1, если $AC = 100$ м, $AC_1 = 32$ м, $AB_1 = 34$ м.

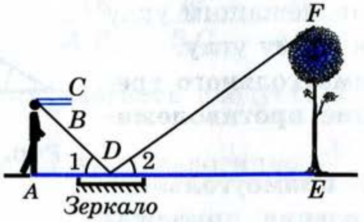


Рис. 203

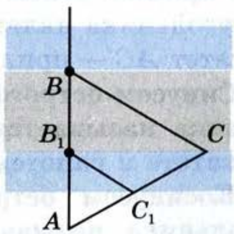


Рис. 204

Задачи на построение

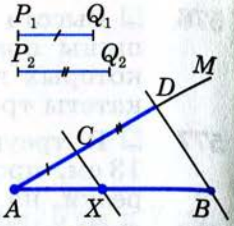


Рис. 205

584 Разделите данный отрезок AB на два отрезка AX и XB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2.

Решение

Проведём какой-нибудь луч AM, не лежащий на прямой AB, и на этом луче отложим последовательно отрезки AC и CD, равные отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 205). Затем проведём прямую BD и прямую, проходящую через точку C параллельно прямой BD. Она пересечёт отрезок AB в искомой точке X (см. задачу **556**).

585 Начертите отрезок AB и разделите его в отношении: а) $2:5$; б) $3:7$; в) $4:3$.

586 Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведённой из вершины меньшего из данных углов.

587 Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла.

588 Постройте треугольник ABC по углу A и медиане AM, если известно, что $AB : AC = 2 : 3$.

589 Постройте треугольник ABC по углу A и стороне BC, если известно, что $AB : AC = 2 : 1$.

590 Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов, равному отношению двух данных отрезков.

§4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

68 Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 206). Катет BC этого треугольника является противолежащим углу A, а катет AC — прилежащим к этому углу.

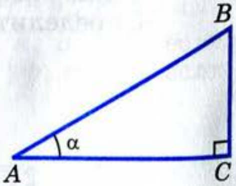


Рис. 206

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Синус, косинус и тангенс угла, равного α, обозначаются символами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ (читается: «синус альфа», «косинус альфа» и «тангенс альфа»). На рисунке 206

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \qquad (1)$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (2) получаем: $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}$. Сравнивая с формулой (3), находим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad (4)$$

т. е. **тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла.**

Докажем, что **если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.**

В самом деле, пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника с прямыми углами C и C_1 и равными острыми углами A и A_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Из этих равенств следует, что $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\sin A = \sin A_1$. Аналогично $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\cos A = \cos A_1$, и $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, т. е. $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$.

Докажем теперь справедливость равенства

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \qquad (5)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$, поэтому $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Равенство (5) называется **основным тригонометрическим тождеством**[1].

69 Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°

Найдём сначала значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° и 60°. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, у которого $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ (рис. 207). Так как катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы, то $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$. Но $\frac{BC}{AB} = \sin A = \sin 30°$. С другой стороны, $\frac{BC}{AB} = \cos B = \cos 60°$. Итак,

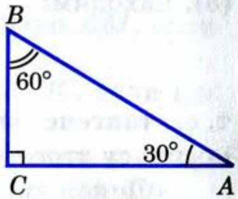


Рис. 207

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 60° = \sqrt{1 - \cos^2 60°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (4) находим:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

[1] Слово «тригонометрия» в переводе с греческого языка означает «измерение треугольников».

Найдём теперь $\sin 45°$, $\cos 45°$ и $\operatorname{tg} 45°$. Для этого рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 208). В этом треугольнике $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45°$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2 = 2BC^2$, откуда $AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$.

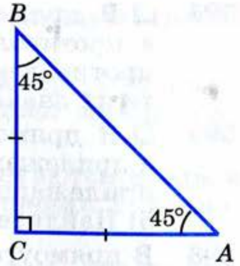


Рис. 208

Следовательно,

$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} = 1.$$

Составим таблицу значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ для углов α, равных 30°, 45°, 60°:

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Задачи

591 Найдите синус, косинус и тангенс углов A и B треугольника ABC с прямым углом C, если: а) $BC = 8$, $AB = 17$; б) $BC = 21$, $AC = 20$; в) $BC = 1$, $AC = 2$; г) $AC = 24$, $AB = 25$.

592 Постройте угол α, если: а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; в) $\cos\alpha = 0,2$; г) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; д) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; е) $\sin\alpha = 0,4$.

593 Найдите: а) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{4}$.

594 В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а противолежащий угол равен β. а) Выразите другой катет, противолежащий ему угол и гипотенузу через b и β. б) Найдите их значения, если $b = 10$ см, $\beta = 50°$.

595 В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а прилежащий к нему угол равен α. а) Выразите второй катет, прилежащий к нему острый угол и гипотенузу через b и α. б) Найдите их значения, если $b = 12$ см, $\alpha = 42°$.

596 В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов равен α. Выразите второй острый угол и катеты через c и α и найдите их значения, если $c = 24$ см, а $\alpha = 35°$.

597 Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Выразите через a и b гипотенузу и тангенсы острых углов треугольника и найдите их значения при $a = 12$, $b = 15$.

598 Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом α при основании, если: а) боковая сторона равна b; б) основание равно a.

599 Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями 2 см и 6 см, если угол при большем основании равен α.

600 Насыпь шоссейной дороги имеет в верхней части ширину 60 м. Какова ширина насыпи в нижней её части, если угол наклона откосов равен 60°, а высота насыпи равна 12 м (рис. 209)?

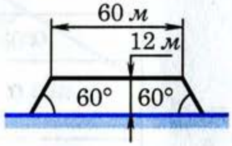


Рис. 209

601 Найдите углы ромба с диагоналями $2\sqrt{3}$ и 2.

602 Стороны прямоугольника равны 3 см и $\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.

603 В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 12 см, а угол BAD равен 47°50′. Найдите площадь параллелограмма, если его диагональ BD перпендикулярна к стороне AB.

Вопросы для повторения к главе VII

1 Что называется отношением двух отрезков?

2 В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?

3 Дайте определение подобных треугольников.

4 Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей подобных треугольников.

5 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак подобия треугольников.

6 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак подобия треугольников.

7 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак подобия треугольников.

8 Какой отрезок называется средней линией треугольника? Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

9 Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

10 Сформулируйте и докажите утверждение о том, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на подобные треугольники.

11 Сформулируйте и докажите утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

12 Приведите пример решения задачи на построение методом подобия.

13 Расскажите, как определить на местности высоту предмета и расстояние до недоступной точки.

14 Объясните, какие две фигуры называются подобными. Что такое коэффициент подобия фигур?

15 Что называется синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?

16 Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.

17 Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?

18 Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°? Ответ обоснуйте.

Дополнительные задачи

604 □ Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $CA = 10$ см. Наибольшая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7,5 см. Найдите две другие стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

605 Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит её на два подобных треугольника. Докажите, что $AC^2 = a \cdot b$, где a и b — основания трапеции.

606 □ Биссектрисы MD и NK треугольника MNP пересекаются в точке O. Найдите отношение $OK : ON$, если $MN = 5$ см, $NP = 3$ см, $MP = 7$ см.

607 □ Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне как 4 : 3, а высота, проведённая к основанию, равна 30 см. Найдите отрезки, на которые эту высоту делит биссектриса угла при основании.

608 На продолжении боковой стороны OB равнобедренного треугольника AOB с основанием AB взята точка C так, что точка B лежит между точками O и C. Отрезок AC пересекает биссектрису угла AOB в точке M. Докажите, что $AM < MC$.

609 На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

610 Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит сторону AC в отношении $2:7$, считая от вершины A. Найдите стороны отсечённого треугольника, если $AB = 10$ см, $BC = 18$ см, $CA = 21{,}6$ см.

611 Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок, параллельный стороне BC, концы которого лежат на сторонах AB и AC.

612 Два шеста AB и CD разной длины a и b установлены вертикально на некотором расстоянии друг от друга так, как показано на рисунке 210. Концы A и D, B и C соединены верёвками, которые пересекаются в точке O. По данным рисунка докажите, что: а) $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$ и $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$; б) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$. Найдите x и докажите, что x не зависит от расстояния d между шестами AB и CD.

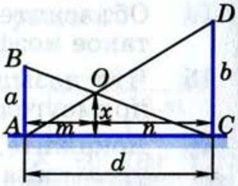


Рис. 210

613 Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если: а) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$, где BM и B_1M_1 — медианы треугольников; б) $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

614 □ Диагонали прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A взаимно перпендикулярны. Основание AB равно 6 см, а боковая сторона AD равна 4 см. Найдите DC, DB и CB.

615* Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен её основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b.

616 Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.

617 Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

618 Точки M и N являются соответственно серединами сторон CD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

619 □ Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

620 В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD = CE$.

621 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC сумма оснований равна b, диагональ AC равна a, $\angle ACB = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

622 □ На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K так, что $AK = \frac{1}{4}KD$. Диагональ AC и отрезок BK пересекаются в точке P. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника APK равна 1 см².

623 □ В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle ACD = 90°$, $BC = 4$ см, $AD = 16$ см. Найдите углы C и D трапеции.

624 Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть треугольников, площади которых попарно равны.

625 □ Основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ в 5 раз больше основания BC. Высота BH пересекает диагональ AC в точке M, площадь треугольника AMH равна 4 см². Найдите площадь трапеции $ABCD$.

626* Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

Задачи на построение

627 Дан треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC, площадь которого в два раза больше площади треугольника ABC.

628 Даны три отрезка, длины которых соответственно равны a, b и c. Постройте отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

629 □ Постройте треугольник, если даны середины его сторон.

630 □ Постройте треугольник по стороне и медианам, проведённым к двум другим сторонам.

Глава VIII

Окружность

В этой главе мы вернёмся к одной из основных геометрических фигур — к окружности. Будут доказаны различные теоремы, связанные с окружностями, в том числе теоремы об окружностях, вписанных в треугольник, четырёхугольник, и окружностях, описанных около этих фигур. Кроме того, будут доказаны три утверждения о замечательных точках треугольника — точке пересечения биссектрис треугольника, точке пересечения его высот и точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Первые два утверждения были сформулированы ещё в 7 классе, и вот теперь мы сможем провести их доказательства.

§1 Касательная к окружности

70 Взаимное расположение прямой и окружности

Выясним, сколько общих точек могут иметь прямая и окружность в зависимости от их взаимного расположения. Ясно, что если прямая проходит через центр окружности, то она пересекает окружность в двух точках — концах диаметра, лежащего на этой прямой.

Пусть прямая p не проходит через центр O окружности радиуса r. Проведём перпендикуляр OH к прямой p и обозначим буквой d длину этого перпендикуляра, т. е. расстояние от центра данной окружности до прямой (рис. 211).

Исследуем взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между d и r. Возможны три случая.

1) $d < r$. На прямой p от точки H отложим два отрезка HA и HB, длины которых равны $\sqrt{r^2 - d^2}$ (рис. 211, a). По теореме Пифагора

$$OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r,$$

$$OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r.$$

Следовательно, точки A и B лежат на окружности и, значит, являются общими точками прямой p и данной окружности.

Докажем, что прямая p и данная окружность не имеют других общих точек. Предположим, что они имеют ещё одну общую точку C. Тогда медиана OD равнобедренного треугольника OAC, проведённая к основанию AC, является высотой этого треугольника, поэтому $OD \perp p$. Отрезки OD и OH не совпадают, так как середина D отрезка AC не совпадает с точкой H — серединой отрезка AB. Мы получили, что из точки O проведены два перпендикуляра (отрезки OH и OD) к прямой p, что невозможно.

Итак, **если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности ($d < r$), то прямая и окружность имеют две общие точки. В этом случае прямая называется секущей по отношению к окружности.**

2) $d = r$. В этом случае $OH = r$, т. е. точка H лежит на окружности и, значит, является общей точкой прямой и окружности (рис. 211, *б*). Прямая p и окружность не имеют других общих точек, так как для любой точки M прямой p, отличной от точки H, $OM > OH = r$ (наклонная OM больше перпендикуляра OH), и, следовательно, точка M не лежит на окружности.

Итак, **если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.**

3) $d > r$. В этом случае $OH > r$, поэтому для любой точки M прямой p $OM \geqslant OH > r$ (рис. 211, *в*). Следовательно, точка M не лежит на окружности.

Итак, **если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.**

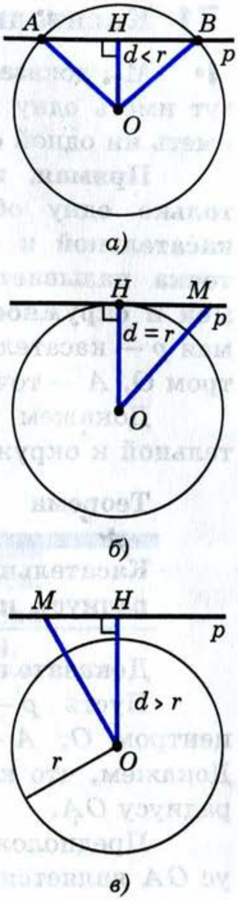


Рис. 211

71 Касательная к окружности

Мы доказали, что прямая и окружность могут иметь одну или две общие точки и могут не иметь ни одной общей точки.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности. На рисунке 212 прямая p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания.

Докажем теорему о свойстве касательной к окружности.

Теорема

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Доказательство

Пусть p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания (см. рис. 212). Докажем, что касательная p перпендикулярна к радиусу OA.

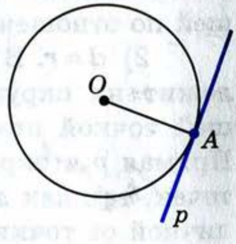


Рис. 212

Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к прямой p. Так как перпендикуляр, проведённый из точки O к прямой p, меньше наклонной OA, то расстояние от центра O окружности до прямой p меньше радиуса. Следовательно, прямая p и окружность имеют две общие точки. Но это противоречит условию: прямая p — касательная.

Таким образом, прямая p перпендикулярна к радиусу OA. **Теорема доказана.**

Рассмотрим две касательные к окружности с центром O, проходящие через точку A и касающиеся окружности в точках B и C (рис. 213). Отрезки AB и AC назовём **отрезками касательных, проведёнными из точки A.** Они обладают следующим свойством:

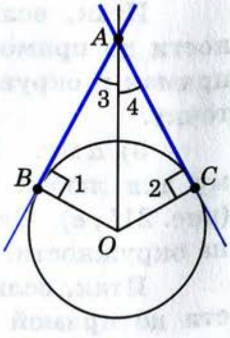


Рис. 213

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Для доказательства этого утверждения обратимся к рисунку 213. По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому треугольники ABO и ACO прямоугольные. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC. Следовательно, $AB = AC$ и $\angle 3 = \angle 4$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему, обратную теореме о свойстве касательной (признак касательной).

Теорема

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Доказательство

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведённым из центра окружности к данной прямой. Поэтому расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, и, следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Но это и означает, что данная прямая является касательной к окружности. **Теорема доказана.**

На этой теореме основано решение задач на построение касательной. Решим одну из таких задач.

Задача

Через данную точку A окружности с центром O провести касательную к этой окружности.

Решение

Проведём прямую OA, а затем построим прямую p, проходящую через точку A перпендикулярно к прямой OA. По признаку касательной прямая p является искомой касательной.

Задачи

631 Пусть d — расстояние от центра окружности радиуса r до прямой p. Каково взаимное расположение прямой p и окружности, если: а) $r=16$ см, $d=12$ см; б) $r=5$ см, $d=4{,}2$ см; в) $r=7{,}2$ дм, $d=3{,}7$ дм; г) $r=8$ см, $d=1{,}2$ дм; д) $r=5$ см, $d=50$ мм?

632 ❑ Расстояние от точки A до центра окружности меньше радиуса окружности. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A, является секущей по отношению к данной окружности.

633 Даны квадрат $OABC$, сторона которого равна 6 см, и окружность с центром в точке O радиуса 5 см. Какие из прямых OA, AB, BC и AC являются секущими по отношению к этой окружности?

634 ❑ Радиус OM окружности с центром O делит хорду AB пополам. Докажите, что касательная, проведённая через точку M, параллельна хорде AB.

635 ❑ Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

636 ❑ Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите угол ACB.

637 ❑ Угол между диаметром AB и хордой AC равен 30°. Через точку C проведена касательная, пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

638 ❑ Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $OA=2$ см, а $r=1{,}5$ см.

639 ❑ Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $\angle AOB=60°$, а $r=12$ см.

640 Даны окружность с центром O радиуса 4,5 см и точка A. Через точку A проведены две касательные к окружности. Найдите угол между ними, если $OA=9$ см.

641 ❑ Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O, проведёнными из точки A. Найдите угол BAC, если середина отрезка AO лежит на окружности.

642 ❑ На рисунке 213 $OB=3$ см, $OA=6$ см. Найдите AB, AC, $\angle 3$ и $\angle 4$.

643 ❑ Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите BC, если $\angle OAB=30°$, $AB=5$ см.

644 ❑ Прямые MA и MB касаются окружности с центром O в точках A и B. Точка C симметрична точке O относительно точки B. Докажите, что $\angle AMC=3\angle BMC$.

645 Из концов диаметра AB данной окружности проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к касательной, которая не перпенди-

кулярна к диаметру AB. Докажите, что точка касания является серединой отрезка A_1B_1.

646 В треугольнике ABC угол B прямой. Докажите, что: а) прямая BC является касательной к окружности с центром A радиуса AB; б) прямая AB является касательной к окружности с центром C радиуса CB; в) прямая AC не является касательной к окружностям с центром B и радиусами BA и BC.

647 Отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 3 см. Является ли прямая AH касательной к окружности, если: а) $OA = 5$ см, $AH = 4$ см; б) $\angle HAO = 45°$, $OA = 4$ см; в) $\angle HAO = 30°$, $OA = 6$ см?

648 Постройте касательную к окружности с центром O:
а) параллельную данной прямой;
б) перпендикулярную к данной прямой.

§2 Центральные и вписанные углы

72 Градусная мера дуги окружности

Отметим на окружности две точки A и B. Они разделяют окружность на две дуги. Чтобы различать эти дуги, на каждой из них отмечают промежуточную точку, например L и M (рис. 214). Обозначают дуги так: $\smile ALB$ и $\smile AMB$. Иногда используется обозначение без промежуточной точки: $\smile AB$ (когда ясно, о какой из двух дуг идёт речь).

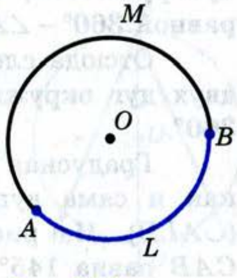


Рис. 214

Дуга называется **полуокружностью**, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром окружности. На рисунке 215, *а* изображены две полуокружности, одна из которых выделена цветом.

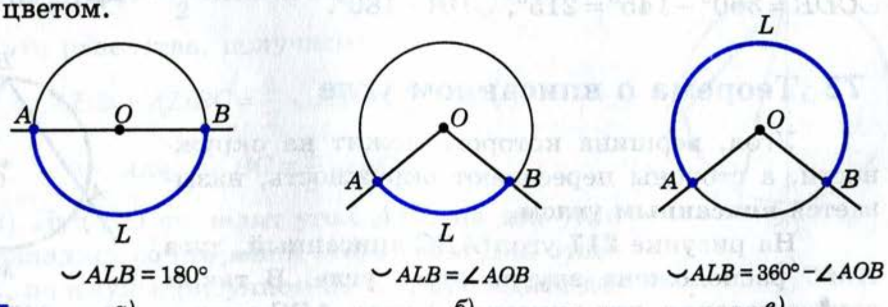


Рис. 215

Угол с вершиной в центре окружности называется её **центральным углом**. Пусть стороны центрального угла окружности с центром O пересекают её в точках A и B. Центральному углу AOB соответствуют две дуги с концами A и B (рис. 215). Если $\angle AOB$ развёрнутый, то ему соответствуют две полуокружности (рис. 215, *а*). Если $\angle AOB$ неразвёрнутый, то говорят, что дуга AB, расположенная внутри этого угла, **меньше полуокружности**. На рисунке 215, *б* эта дуга выделена цветом. Про другую дугу с концами A и B говорят, что она **больше полуокружности** (дуга ALB на рисунке 215, *в*).

Дугу окружности можно измерять в градусах. **Если дуга AB окружности с центром O меньше полуокружности или является полуокружностью, то её градусная мера считается равной градусной мере центрального угла AOB** (см. рис. 215, *а*, *б*). **Если же дуга AB больше полуокружности, то её градусная мера считается равной $360° - \angle AOB$** (см. рис. 215, *в*).

Отсюда следует, что **сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360°**.

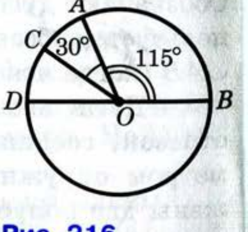


Рис. 216

Градусная мера дуги AB (дуги ALB), как и сама дуга, обозначается символом $\smile AB$ ($\smile ALB$). На рисунке 216 градусная мера дуги CAB равна 145°. Обычно говорят кратко: «Дуга CAB равна 145°» и пишут: $\smile CAB = 145°$. На этом же рисунке $\smile ADB = 360° - 115° = 245°$, $\smile CDB = 360° - 145° = 215°$, $\smile DB = 180°$.

73 Теорема о вписанном угле

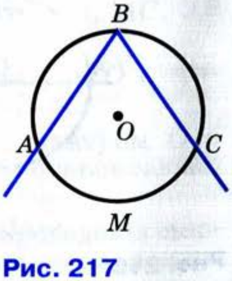


Рис. 217

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

На рисунке 217 угол ABC вписанный, дуга AMC расположена внутри этого угла. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC **опира-**

ется на дугу AMC. Докажем теорему о вписанном угле.

Теорема

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство

Пусть $\angle ABC$ — вписанный угол окружности с центром O, опирающийся на дугу AC (рис. 218). Докажем, что $\angle AOC = \frac{1}{2} \smile AC$. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

1) **Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC**, например со стороной BC (рис. 218, *а*). В этом случае дуга AC меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \smile AC$. Так как угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника ABO, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, то

$$\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1.$$

Отсюда следует, что

$$2\angle 1 = \smile AC \text{ или } \angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2} \smile AC.$$

2) **Луч BO делит угол ABC на два угла.** В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D (рис. 218, *б*). Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\smile AD$ и $\smile DC$. По доказанному в п. 1) $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \smile DC$. Складывая эти равенства, получаем:

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile DC,$$

$$\text{или } \angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

3) **Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла.** Для этого случая, пользуясь рисунком 218, *в*, проведите доказательство самостоятельно.

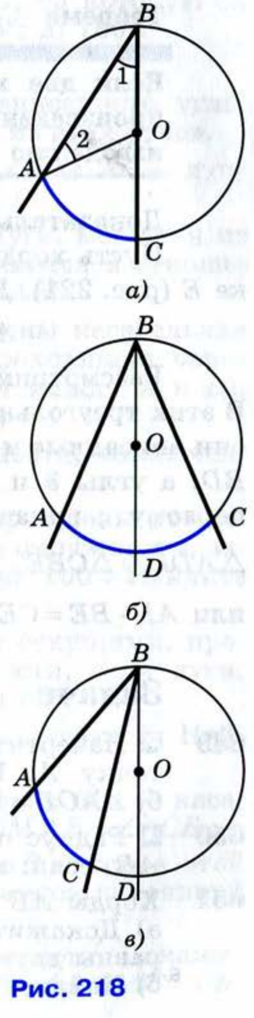


Рис. 218

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 219).

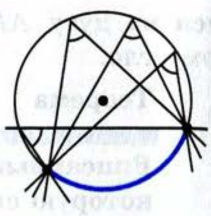


Рис. 219

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой (рис. 220).

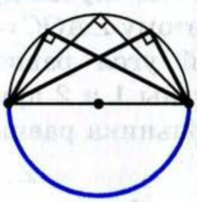


Рис. 220

Используя следствие 1, докажем теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд.

Теорема

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Доказательство

Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке E (рис. 221). Докажем, что

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE.$$

Рассмотрим треугольники ADE и CBE. В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Отсюда следует, что $\frac{AE}{CE} = \frac{DE}{BE}$, или $AE \cdot BE = CE \cdot DE$. **Теорема доказана.**

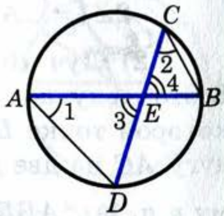


Рис. 221

Задачи

649 Начертите окружность с центром O и отметьте на ней точку A. Постройте хорду AB так, чтобы: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 120°$; г) $\angle AOB = 180°$.

650 Радиус окружности с центром O равен 16. Найдите хорду AB, если: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 180°$.

651 Хорды AB и CD окружности с центром O равны.
а) Докажите, что две дуги с концами A и B соответственно равны двум дугам с концами C и D.
б) Найдите дуги с концами C и D, если $\angle AOB = 112°$.

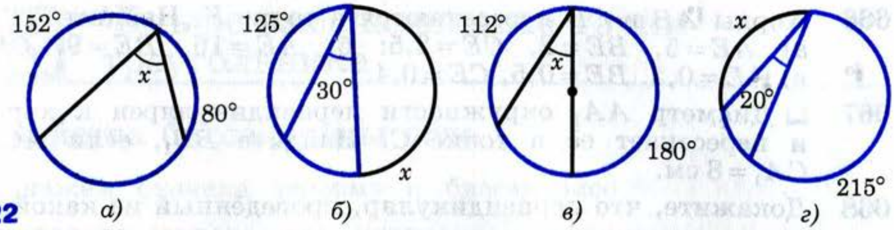


Рис. 222

652 На полуокружности AB взяты точки C и D так, что $\smile AC = 37°$, $\smile BD = 23°$. Найдите хорду CD, если радиус окружности равен 15 см.

653 Найдите вписанный угол ABC, если дуга AC, на которую он опирается, равна: а) 48°; б) 57°; в) 90°; г) 124°; д) 180°.

654 По данным рисунка 222 найдите x.

655 Центральный угол AOB на 30° больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB. Найдите каждый из этих углов.

656 Хорда AB стягивает дугу, равную 115°, а хорда AC — дугу в 43°. Найдите угол BAC.

657 Точки A и B разделяют окружность на две дуги, меньшая из которых равна 140°, а бóльшая точкой M делится в отношении 6 : 5, считая от точки A. Найдите угол BAM.

658 Через точку A к данной окружности проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая AD, проходящая через центр O (D — точка на окружности, O лежит между A и D). Найдите $\angle BAD$ и $\angle ADB$, если $\smile BD = 110°20'$.

659 Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключённых между параллельными хордами, равны.

660 Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 32°. Бóльшая дуга окружности, заключённая между сторонами этого угла, равна 100°. Найдите меньшую дугу.

661 Найдите острый угол, образованный двумя секущими, проведёнными из точки, лежащей вне окружности, если дуги, заключённые между секущими, равны 140° и 52°.

662 Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. Найдите угол BEC, если $\smile AD = 54°$, $\smile BC = 70°$.

663 Отрезок AC — диаметр окружности, AB — хорда, MA — касательная, угол MAB острый. Докажите, что $\angle MAB = \angle ACB$.

664 Прямая AM — касательная к окружности, AB — хорда этой окружности. Докажите, что угол MAB измеряется половиной дуги AB, расположенной внутри угла MAB.

665 Вершины треугольника ABC лежат на окружности. Докажите, что если AB — диаметр окружности, то $\angle C > \angle A$ и $\angle C > \angle B$.

666 Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если: а) $AE = 5$, $BE = 2$, $CE = 2{,}5$; б) $AE = 16$, $BE = 9$, $CE = ED$; в) $AE = 0{,}2$, $BE = 0{,}5$, $CE = 0{,}4$.

667 ☐ Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1 и пересекает её в точке C. Найдите BB_1, если $AC = 4$ см, $CA_1 = 8$ см.

668 Докажите, что перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

669 Пользуясь утверждением, сформулированным в задаче **668**, постройте отрезок, равный среднему пропорциональному для двух данных отрезков.

670 Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках P и Q. Докажите, что $AB^2 = AP \cdot AQ$.

671 ☐ Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D. Найдите CD, если: а) $AB = 4$ см, $AC = 2$ см; б) $AB = 5$ см, $AD = 10$ см.

672 Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках B_1 и C_1, а другая — в точках B_2 и C_2. Докажите, что $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$.

673 ☐ К данной окружности постройте касательную, проходящую через данную точку вне окружности.

Решение

Пусть даны окружность с центром O и точка A вне этой окружности. Допустим, что задача решена и AB — искомая касательная (рис. 223). Так как прямая AB перпендикулярна к радиусу OB, то решение задачи сводится к построению точки B окружности, для которой $\angle ABO$ прямой. Эту точку можно построить следующим образом: проводим отрезок OA и строим его середину O_1. Затем проводим окружность с центром в точке O_1 радиуса O_1A. Эта окружность пересекает данную окружность в двух точках: B и B_1. Прямые AB и AB_1 — искомые касательные, так как $AB \perp OB$ и $AB_1 \perp OB_1$. Действительно, углы ABO и AB_1O, вписанные в окружность с центром O_1, опираются на полуокружности, поэтому они прямые. Очевидно, задача имеет два решения.

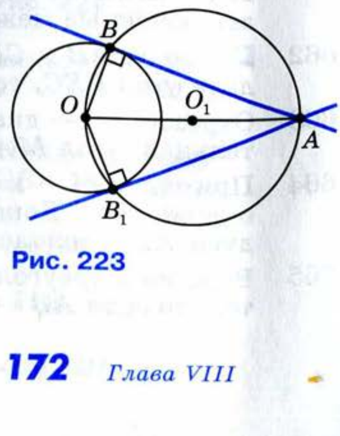


Рис. 223

§3 Четыре замечательные точки треугольника

74 Свойства биссектрисы угла

Докажем сначала теорему о биссектрисе угла.

Теорема

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон[1].

Обратно: **каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе.**

Доказательство

1) Возьмём произвольную точку M на биссектрисе угла BAC, проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC и докажем, что $MK = ML$ (рис. 224). Рассмотрим прямоугольные треугольники AMK и AML. Они равны по гипотенузе и острому углу (AM — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$ по условию). Следовательно, $MK = ML$.

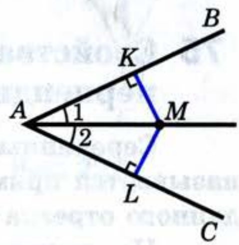


Рис. 224

2) Пусть точка M лежит внутри угла BAC и равноудалена от его сторон AB и AC. Докажем, что луч AM — биссектриса угла BAC (см. рис. 224). Проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC. Прямоугольные треугольники AMK и AML равны по гипотенузе и катету (AM — общая гипотенуза, $MK = ML$ по условию). Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Но это и означает, что луч AM — биссектриса угла BAC. **Теорема доказана.**

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, лежащих внутри неразвёрнутого угла и равноудалённых от сторон угла, является биссектриса этого угла.

[1] То есть равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.

Следствие 2

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

В самом деле, обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC и проведём из этой точки перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к прямым AB, BC и CA (рис. 225). По доказанной теореме $OK = OM$ и $OK = OL$. Поэтому $OM = OL$, т. е. точка O равноудалена от сторон угла ACB и, значит, лежит на биссектрисе CC_1 этого угла. Следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

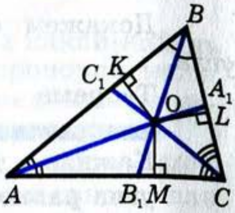


Рис. 225

75 Свойства серединного перпендикуляра к отрезку

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

На рисунке 226 прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

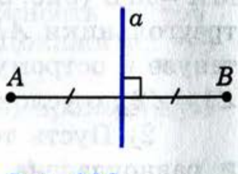


Рис. 226

Докажем теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

Теорема

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Обратно: **каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.**

Доказательство

Пусть прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку AB, точка O — середина этого отрезка (рис. 227, *а*).

1) Рассмотрим произвольную точку M прямой m и докажем, что $AM = BM$. Если точ-

ка M совпадает с точкой O, то это равенство верно, так как O — середина отрезка AB. Пусть M и O — различные точки. Прямоугольные треугольники OAM и OBM равны по двум катетам ($OA = OB$, OM — общий катет), поэтому $AM = BM$.

2) Рассмотрим произвольную точку N, равноудалённую от концов отрезка AB, и докажем, что точка N лежит на прямой m. Если N — точка прямой AB, то она совпадает с серединой O отрезка AB и потому лежит на прямой m. Если же точка N не лежит на прямой AB, то треугольник ANB равнобедренный, так как $AN = BN$ (рис. 227, *б*). Отрезок NO — медиана этого треугольника, а значит, и высота. Таким образом, $NO \perp AB$, поэтому прямые ON и m совпадают, т. е. N — точка прямой m. **Теорема доказана.**

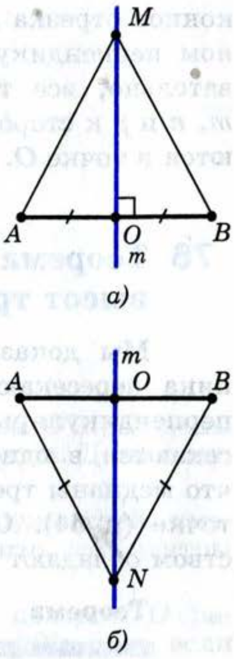


Рис. 227

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, равноудалённых от концов отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Следствие 2

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим серединные перпендикуляры m и n к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 228). Эти прямые пересекаются в некоторой точке O. В самом деле, если предположить противное, т. е. что $m \parallel n$, то прямая BA, будучи перпендикулярной к прямой m, была бы перпендикулярна и к параллельной ей прямой n, а тогда через точку B проходили бы две прямые BA и BC, перпендикулярные к прямой n, что невозможно.

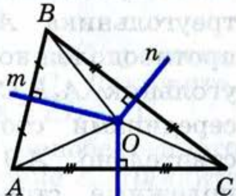


Рис. 228

По доказанной теореме $OB = OA$ и $OB = OC$. Поэтому $OA = OC$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка AC и, значит, лежит на серединном перпендикуляре p к этому отрезку. Следовательно, все три серединных перпендикуляра m, n и p к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O.

76 Теорема о пересечении высот треугольника

Мы доказали, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Ранее было доказано, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (п. 64). Оказывается, аналогичным свойством обладают и высоты треугольника.

Теорема

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (рис. 229).

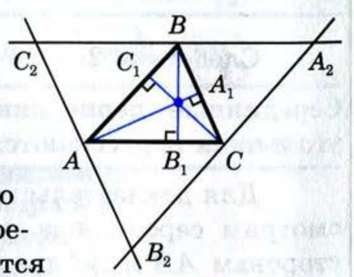


Рис. 229

Проведём через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник $A_2B_2C_2$. Точки A, B и C являются серединами сторон этого треугольника. Действительно, $AB = A_2C$ и $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$. Аналогично $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$. Кроме того, как следует из построения, $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$. Таким образом, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Следовательно, они пересекаются в одной точке. **Теорема доказана.**

Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам и точка пересечения высот (или их продолжений). Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника.**

Задачи

674 Из точки M биссектрисы неразвёрнутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $AB \perp OM$.

675 Стороны угла O касаются каждой из двух окружностей, имеющих общую касательную в точке A. Докажите, что центры этих окружностей лежат на прямой OA.

676 Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r. Найдите: а) OA, если $r=5$ см, $\angle A=60°$; б) r, если $OA=14$ дм, $\angle A=90°$.

677 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что точка O является центром окружности, касающейся прямых AB, BC, AC.

678 Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите углы ACM и BCM, если: а) $\angle AMB=136°$; б) $\angle AMB=111°$.

679 Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D. Найдите: а) AD и CD, если $BD=5$ см, $AC=8{,}5$ см; б) AC, если $BD=11{,}4$ см, $AD=3{,}2$ см.

680 Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке D стороны BC. Докажите, что: а) точка D — середина стороны BC; б) $\angle A=\angle B+\angle C$.

681 Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E. Найдите основание AC, если периметр треугольника AEC равен 27 см, а $AB=18$ см.

682 Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB. Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB.

683 Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то медиана AM треугольника не является высотой.

684 Биссектрисы углов при основании AB равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажите, что прямая CM перпендикулярна к прямой AB.

685 Высоты AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC, проведённые к боковым сторонам, пересекаются в точке M. Докажите, что прямая MC — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

686 Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку.

Решение

Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами в точках A и B радиуса AB (рис. 230). Эти окружности пересекаются в двух точках M_1 и M_2. Отрезки AM_1, AM_2, BM_1, BM_2 равны друг другу как радиусы этих окружностей.

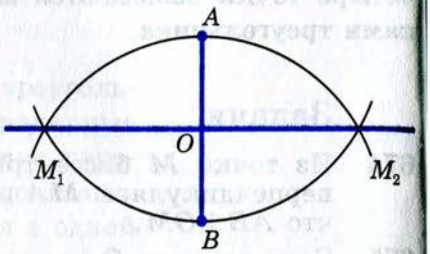


Рис. 230

Проведём прямую M_1M_2. Она является искомым серединным перпендикуляром к отрезку AB. В самом деле, точки M_1 и M_2 равноудалены от концов отрезка AB, поэтому они лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Значит, прямая M_1M_2 и есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

687 Даны прямая a и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. На прямой a постройте точку M, равноудалённую от точек A и B.

688 Даны угол и отрезок. Постройте точку, лежащую внутри данного угла, равноудалённую от его сторон и равноудалённую от концов данного отрезка.

§4 Вписанная и описанная окружности

77 Вписанная окружность

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник — **описанным** около этой окружности. На рисунке 231 четырёхугольник $EFMN$ описан около окружности с центром O, а четырёхугольник $DKMN$ не является описанным около этой окружности, так как сторона DK не касается окружности. На ри-

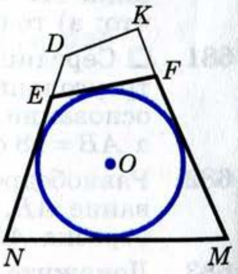


Рис. 231

сунке 232 треугольник ABC описан около окружности с центром O.

Докажем теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведём из точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC и CA (см. рис. 232). Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, то $OK = OL = OM$. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K, L, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC. **Теорема доказана.**

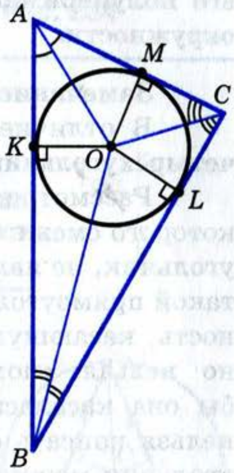


Рис. 232

Замечание 1

Отметим, что **в треугольник можно вписать только одну окружность.**

В самом деле, допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой окружности равноудалён от сторон треугольника и, значит, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Замечание 2

Обратимся к рисунку 232. Мы видим, что треугольник ABC составлен из трёх треугольников: ABO, BCO и CAO. Если в каждом из этих треугольников принять за основание сторону треугольника ABC, то высотой окажется радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC. Поэтому площадь S треугольника ABC выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CA \cdot r = \frac{AB + BC + CA}{2} \cdot r.$$

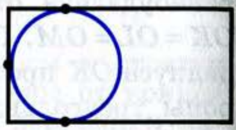
Таким образом,

площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.

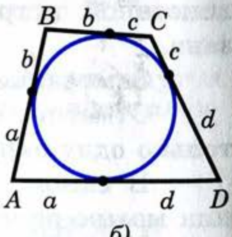
Замечание 3

В отличие от треугольника **не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.**

Рассмотрим, например, прямоугольник, у которого смежные стороны не равны, т. е. прямоугольник, не являющийся квадратом. Ясно, что в такой прямоугольник можно «поместить» окружность, касающуюся трёх его сторон (рис. 233, *а*), но нельзя «поместить» окружность так, чтобы она касалась всех четырёх его сторон, т. е. нельзя вписать окружность. Если же в четырёхугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим замечательным свойством:



а)



б)

Рис. 233

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Это свойство легко установить, используя рисунок 233, *б*, на котором одними и теми же буквами обозначены равные отрезки касательных. В самом деле, $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + AD = a + b + c + d$, поэтому $AB + CD = BC + AD$. Оказывается, верно и обратное утверждение:

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность (см. задачу 724).

78 Описанная окружность

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника, а многоугольник — **вписанным** в эту окружность. На рисунке 234 четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, а четырёхугольник $AECD$ не является вписанным в эту окружность, так как вершина E не лежит на окружности. Треугольник ABC на рисунке 235 является вписанным в окружность с центром O.

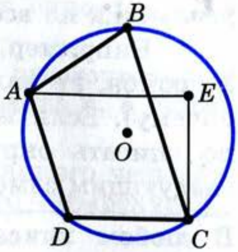


Рис. 234

Докажем теорему об окружности, описанной около треугольника.

Теорема

Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведём отрезки OA, OB и OC (рис. 235). Так как точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, то $OA = OB = OC$. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC. **Теорема доказана.**

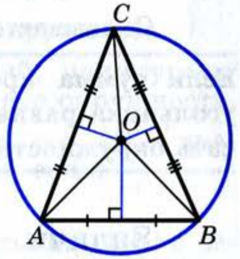


Рис. 235

Замечание 1

Отметим, что **около треугольника можно описать только одну окружность.**

В самом деле, допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудалён от его вершин и поэтому совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Замечание 2

В отличие от треугольника **около четырёхугольника не всегда можно описать окружность.**

Например, нельзя описать окружность около ромба, не являющегося квадратом (объясните почему). Если же около четырёхугольника можно описать окружность, то его углы обладают следующим замечательным свойством:

В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Это свойство легко установить, если обратиться к рисунку 236 и воспользоваться теоремой о вписанном угле. В самом деле,

$$\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD,\ \angle C = \frac{1}{2} \smile BAD,$$

откуда следует

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

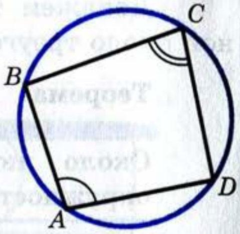


Рис. 236

Оказывается, верно и обратное:

Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность (см. задачу 729).

Задачи

689 В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

690 Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведённую к основанию, в отношении 12 : 5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.

691 Точка касания окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания. Найдите периметр треугольника.

692 В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и CA в точках P, Q и R. Найдите AP, PB, BQ, QC, CR, RA, если $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $CA = 5$ см.

693 ◻ В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Найдите периметр треугольника, если: а) гипотенуза равна 26 см, $r = 4$ см; б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.

694 Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если гипотенуза треугольника равна c, а сумма катетов равна m.

695 ◻ Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырёхугольника.

696 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

697 Докажите, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

698 ◻ Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырёхугольника.

699 ◻ Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 10 см, а его площадь — 12 см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырёхугольник.

700 Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.

701 ◻ Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. В каждый из них впишите окружность.

702 ◻ В окружность вписан треугольник ABC так, что AB — диаметр окружности. Найдите углы треугольника, если: а) $\smile BC = 134°$; б) $\smile AC = 70°$.

703 В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Найдите углы треугольника, если $\smile BC = 102°$.

704 Окружность с центром O описана около прямоугольного треугольника. а) Докажите, что точка O — середина гипотенузы. б) Найдите стороны треугольника, если диаметр окружности равен d, а один из острых углов треугольника равен α.

705 ◻ Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если: а) $AC = 8$ см, $BC = 6$ см; б) $AC = 18$ см, $\angle B = 30°$.

706 ◻ Найдите сторону равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.

707 ◻ Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°, боковая сторона треугольника равна 8 см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

708 Докажите, что можно описать окружность: а) около любого прямоугольника; б) около любой равнобедренной трапеции.

709 Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник.

710 Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

711 Начертите три треугольника: тупоугольный, прямоугольный и равносторонний. Для каждого из них постройте описанную окружность.

Вопросы для повторения к главе VIII

1 Исследуйте взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом окружности и расстоянием от её центра до прямой. Сформулируйте полученные выводы.

2 Какая прямая называется секущей по отношению к окружности?

3 Какая прямая называется касательной к окружности? Какая точка называется точкой касания прямой и окружности?

4 Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной.

5 Докажите, что отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

6 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве касательной.

7 Объясните, как через данную точку окружности провести касательную к этой окружности.

8 Какой угол называется центральным углом окружности?

9 Объясните, какая дуга называется полуокружностью, какая дуга меньше полуокружности, а какая больше полуокружности.

10 Как определяется градусная мера дуги? Как она обозначается?

11 Какой угол называется вписанным? Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.

12 Докажите, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

13 Докажите, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

14 Сформулируйте и докажите теорему об отрезках пересекающихся хорд.

15 Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе угла.

16 Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

17 Какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку?

18 Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

19 Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

20 Сформулируйте и докажите теорему о пересечении высот треугольника.

21 Какая окружность называется вписанной в многоугольник? Какой многоугольник называется описанным около окружности?

22 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в треугольник. Сколько окружностей можно вписать в данный треугольник?

23 Каким свойством обладают стороны четырёхугольника, описанного около окружности?

24 Какая окружность называется описанной около многоугольника? Какой многоугольник называется вписанным в окружность?

25 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около треугольника. Сколько окружностей можно описать около данного треугольника?

26 Каким свойством обладают углы четырёхугольника, вписанного в окружность?

Дополнительные задачи

712 Докажите, что касательные, проведённые через концы хорды, не являющейся диаметром окружности, пересекаются.

713 Прямые AB и AC — касательные к окружности с центром O, B и C — точки касания. Через произвольную точку X, взятую на дуге BC, проведена касательная к этой окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N. Докажите, что периметр треугольника AMN и величина угла MON не зависят от выбора точки X на дуге BC.

714* Две окружности имеют общую точку M и общую касательную в этой точке. Прямая AB касается одной окружности в точке A, а другой — в точке B. Докажите, что точка M лежит на окружности с диаметром AB.

715 Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1. Докажите, что градусные меры дуг AB и AB_1, меньших полуокружности, равны.

716 Точки A, B, C и D лежат на окружности. Докажите, что если $\smile AB = \smile CD$, то $AB = CD$.

717 Отрезок AB является диаметром окружности, а хорды BC и AD параллельны. Докажите, что хорда CD является диаметром.

718 По данным рисунка 237 докажите, что

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB).$$

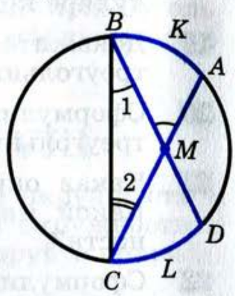


Рис. 237

Решение

Проведём хорду BC. Так как $\angle AMB$ — внешний угол треугольника BMC, то $\angle AMB = \angle 1 + \angle 2$. По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2} \smile CLD$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \smile AKB$, поэтому $\angle AMB = \frac{1}{2}(\smile CLD + \smile AKB)$.

719 Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие. Докажите, что угол между ними измеряется полуразностью дуг, заключённых внутри угла.

720 Может ли вершина разностороннего треугольника лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне? Ответ обоснуйте.

721 Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат.

722 Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности радиуса r. Известно, что $AB : CD = 2 : 3$, $AD : BC = 2 : 1$. Найдите стороны четырёхугольника, если его площадь равна S.

723 Докажите, что если прямые, содержащие основания трапеции, касаются окружности, то прямая, проходящая через середины боковых сторон трапеции, проходит через центр этой окружности.

724 Докажите, что если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Решение

Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (1)$$

Точка O пересечения биссектрис углов A и B равноудалена от сторон AD, AB и BC, поэтому можно провести окружность с центром O, касающуюся указанных трёх сторон (рис. 238, *а*). Докажем, что эта окружность касается также стороны CD и, значит, является вписанной в четырёхугольник $ABCD$.

Предположим, что это не так. Тогда прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей. Рассмотрим первый случай (рис. 238, *б*). Проведём касательную $C'D'$, параллельную стороне CD (C' и D' — точки пересечения касательной со сторонами BC и AD). Так как $ABC'D'$ — описанный четырёхугольник, то по свойству его сторон

$$AB + C'D' = BC' + AD'. \qquad (2)$$

Но $BC' = BC - C'C$, $AD' = AD - D'D$, поэтому из равенства (2) получаем:

$$C'D' + C'C + D'D = BC + AD - AB.$$

Правая часть этого равенства в силу (1) равна CD. Таким образом, приходим к равенству

$$C'D' + C'C + D'D = CD,$$

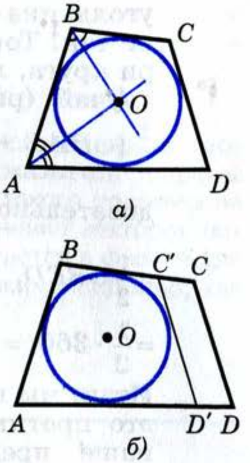


Рис. 238

т. е. в четырёхугольнике $C'CDD'$ одна сторона равна сумме трёх других сторон. Но этого не может быть, и, значит, наше предположение ошибочно. Аналогично можно доказать, что прямая CD не может быть секущей окружности. Следовательно, окружность касается стороны CD, что и требовалось доказать.

725 Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b.

726 Центр описанной около треугольника окружности лежит на медиане. Докажите, что этот треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

727 В равнобедренный треугольник вписана окружность с центром O_1 и около него описана окружность с центром O_2. Докажите, что точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

728 Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб — квадрат.

729* Докажите, что если в четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Решение

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$

$$\angle A + \angle C = 180°. \qquad (1)$$

Проведём окружность через три вершины четырёхугольника: A, B и D (рис. 239, *а*) — и докажем, что она проходит также через вершину C, т. е. является описанной около четырёхугольника $ABCD$. Предположим, что это не так. Тогда вершина C лежит либо внутри круга, либо вне его. Рассмотрим первый случай (рис. 239, *б*). В этом случае $\angle C = \frac{1}{2}(\smile DAB + \smile EF)$ (см. задачу **718**), и, следовательно, $\angle C > \frac{1}{2}\smile DAB$. Так как $\angle A = \frac{1}{2}\smile BED$, то $\angle A + \angle C > \frac{1}{2}(\smile BED + \smile DAB) = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°$.

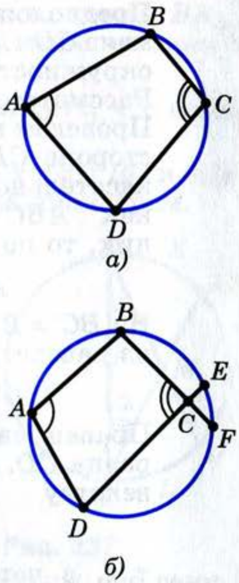


Рис. 239

Итак, мы получили, что $\angle A + \angle C > 180°$. Но это противоречит условию (1), и, значит, наше предположение ошибочно. Аналогично можно доказать (опираясь на задачу **719**), что вершина C не может лежать вне круга. Следовательно, вершина C лежит на окружности, что и требовалось доказать.

730 Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла AOB и пересекающиеся в точке C внутри угла. Докажите, что около четырёхугольника $ACBO$ можно описать окружность.

731 Докажите, что около выпуклого четырёхугольника, образованного при пересечении биссектрис углов трапеции, можно описать окружность.

732 В прямоугольном треугольнике ABC из точки M стороны AC проведён перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Докажите, что углы MHC и MBC равны.

733 ☐ Найдите радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности, если радиус описанной окружности равен 10 см.

734 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность и можно описать около него окружность, то этот параллелограмм — квадрат.

735 В трапецию с основаниями a и b можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность. Найдите радиус вписанной окружности.

736 ☐ Даны прямая a, точка A, лежащая на этой прямой, и точка B, не лежащая на ней. Постройте окружность, проходящую через точку B и касающуюся прямой a в точке A.

737 Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.

Глава IX

Векторы

Эта глава посвящена разработке векторного аппарата геометрии. С помощью векторов можно доказывать теоремы и решать геометрические задачи. Примеры такого применения векторов приведены в данной главе. Но изучение векторов полезно ещё и потому, что они широко используются в физике для описания различных физических величин, таких, например, как скорость, ускорение, сила.

§1 Понятие вектора

79 Понятие вектора

Многие физические величины, например сила, перемещение материальной точки, скорость, характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие физические величины называются **векторными величинами** (или коротко **векторами**).

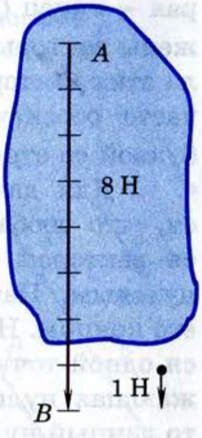


Рис. 240

Рассмотрим пример. Пусть на тело действует сила в 8 Н. На рисунке силу изображают отрезком со стрелкой (рис. 240). Стрелка указывает направление силы, а длина отрезка соответствует в выбранном масштабе числовому значению силы. Так, на рисунке 240 сила в 1 Н изображена отрезком длиной 0,6 см, поэтому сила в 8 Н изображена отрезком длиной 4,8 см.

Отвлекаясь от конкретных свойств физических векторных величин, мы приходим к геометрическому понятию вектора.

Рассмотрим произвольный отрезок. Его концы называются также **граничными точками отрезка**.

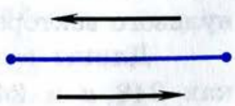


Рис. 241

На отрезке можно указать два направления: от одной граничной точки к другой и наоборот (рис. 241).

Чтобы выбрать одно из этих направлений, одну граничную точку отрезка назовём **началом**

отрезка, а другую — **концом отрезка** и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.

Определение

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется **направленным отрезком** или **вектором.**

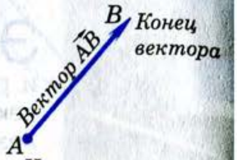


Рис. 242

На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой, показывающей направление вектора. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними, например $\overrightarrow{AB}$. Первая буква обозначает начало вектора, вторая — конец (рис. 242). На рисунке 243, *а* изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$; точки A, C, E — начала этих векторов, а B, D, F — их концы. Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 243, *б*).

Для дальнейшего целесообразно условиться, что любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется **нулевым.** Начало нулевого вектора совпадает с его концом. На рисунке такой вектор изображается одной точкой. Если, например, точка, изображающая нулевой вектор, обозначена буквой M, то данный нулевой вектор можно обозначить так: $\overrightarrow{MM}$ (рис. 243, *а*). Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$. На рисунке 243 векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ ненулевые, а вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой.

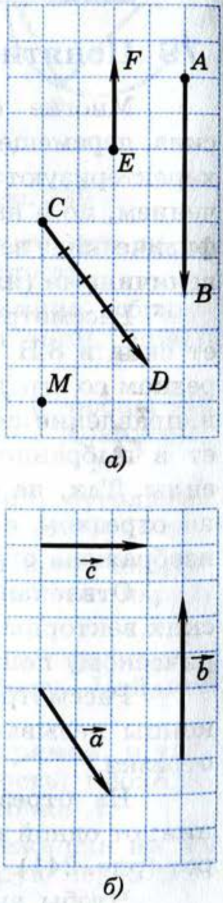


Рис. 243

Длиной или **модулем** ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Длины векторов, изображённых на рисунках 243, *а* и 243, *б*, таковы: $|\overrightarrow{AB}| = 6$, $|\overrightarrow{CD}| = 5$, $|\overrightarrow{EF}| = 2{,}5$, $|\overrightarrow{MM}| = 0$, $|\vec{a}| = \sqrt{13}$, $|\vec{b}| = 4{,}5$, $|\vec{c}| = 3$ (каждая клетка на рисунке 243 имеет сторону, равную единице измерения отрезков).

80 Равенство векторов

Прежде чем дать определение равных векторов, обратимся к примеру. Рассмотрим движение тела, при котором все его точки движутся с одной и той же скоростью и в одном и том же направлении.

Скорость каждой точки M тела является векторной величиной, поэтому её можно изобразить направленным отрезком, начало которого совпадает с точкой M (рис. 244). Так как все точки тела движутся с одной и той же скоростью, то все направленные отрезки, изображающие скорости этих точек, имеют одно и то же направление и длины их равны.

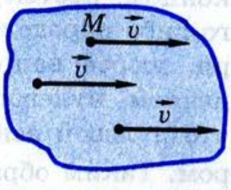


Рис. 244

Этот пример подсказывает нам, как определить равенство векторов.

Предварительно введём понятие коллинеарных векторов.

Ненулевые векторы называются **коллинеарными,** если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

На рисунке 245 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MM}$ (вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой) коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$, а также $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ не коллинеарны.

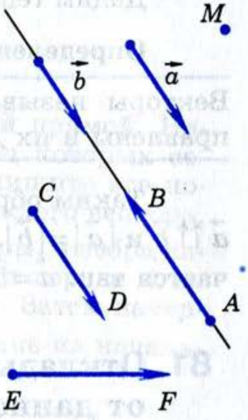


Рис. 245

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **сонаправленными,** а во втором — **противоположно направленными**[1]. Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается

[1] Нетрудно дать и точное определение этих понятий. Например, два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых, называются сонаправленными (противоположно направленными), если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, проходящей через начала. Как сформулировать аналогичное определение для ненулевых векторов, лежащих на одной прямой?

следующим образом: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то это обозначают так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. На рисунке 245 изображены как сонаправленные, так и противоположно направленные векторы: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определённого направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора. Условимся считать, что нулевой вектор сонаправлен с любым вектором. Таким образом, на рисунке 245 $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и т. д.

Ненулевые коллинеарные векторы обладают свойствами, которые проиллюстрированы на рисунке 246, *а* — *в*.

Дадим теперь определение равных векторов.

Определение

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} = \vec{b}$.

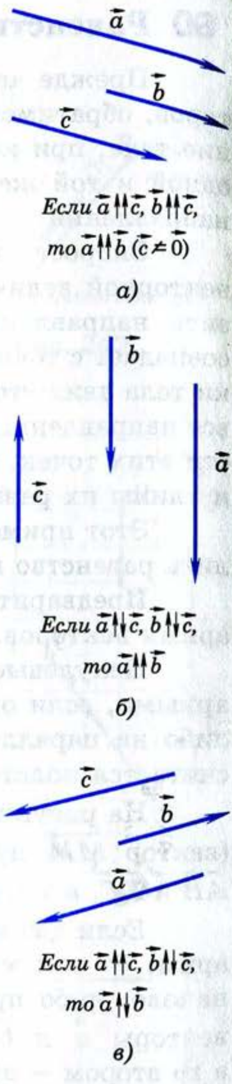


Рис. 246

81 Откладывание вектора от данной точки

Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что **вектор $\vec{a}$ отложен от точки A** (рис. 247). Докажем следующее утверждение:

от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.

Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A

Рис. 247

В самом деле, если $\vec{a}$ — нулевой вектор, то искомым вектором является вектор $\overrightarrow{MM}$.

Допустим, что вектор $\vec{a}$ ненулевой, а точки A и B — его начало и конец. Проведём через точку M прямую p, параллельную AB (рис. 248; если M — точка прямой AB, то в качестве прямой p возьмём саму прямую AB). На прямой p отложим отрезки MN и MN', равные отрезку AB, и выберем из векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MN'}$ тот, который сонаправлен с вектором $\vec{a}$ (на рисунке 248 вектор $\overrightarrow{MN}$). Этот вектор и является искомым вектором, равным вектору $\vec{a}$. Из построения следует, что такой вектор только один.

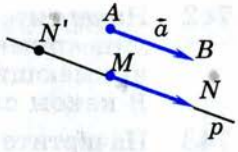


Рис. 248

Замечание

Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой. Так обозначены, например, равные векторы скорости различных точек на рисунке 244. Иногда про такие векторы говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек.

Практические задания

738 Отметьте точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Начертите все ненулевые векторы, начало и конец которых совпадают с какими-то двумя из этих точек. Выпишите все полученные векторы и укажите начало и конец каждого вектора.

739 Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы, изображающие полёт самолёта сначала на 300 км на юг от города A до B, а потом на 500 км на восток от города B до C. Затем начертите вектор $\overrightarrow{AC}$, который изображает перемещение из начальной точки в конечную.

740 Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ так, чтобы:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ были коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}| = 1$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 2,5$ см, $|\overrightarrow{EF}| = 4,5$ см;

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$ были коллинеарны, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были не коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}| = 3$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 1,5$ см, $|\overrightarrow{EF}| = 1$ см.

741 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите несколько векторов: а) сонаправленных с вектором $\vec{a}$; б) сонаправленных с вектором $\vec{b}$; в) противоположно направленных вектору $\vec{b}$; г) противоположно направленных вектору $\vec{a}$.

742 Начертите два вектора: а) имеющие равные длины и неколлинеарные; б) имеющие равные длины и сонаправленные; в) имеющие равные длины и противоположно направленные. В каком случае полученные векторы равны?

743 Начертите ненулевой вектор $\vec{a}$ и отметьте на плоскости три точки A, B и C. Отложите от точек A, B и C векторы, равные $\vec{a}$.

Задачи

744 Какие из следующих величин являются векторными: скорость, масса, сила, время, температура, длина, площадь, работа?

745 В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, M — середина стороны AB. Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$.

746 Основание AD прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12 см, $AB = 5$ см, $\angle D = 45°$. Найдите длины векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

747 Выпишите пары коллинеарных векторов, которые определяются сторонами: а) параллелограмма $MNPQ$; б) трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC; в) треугольника FGH. Укажите среди них пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

748 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$? Ответ обоснуйте.

749 □ Точки S и T являются серединами боковых сторон MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{NL}$ и $\overrightarrow{KL}$; б) $\overrightarrow{MS}$ и $\overrightarrow{SN}$; в) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{KM}$; д) $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$?

750 Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: если середины отрезков AD и BC совпадают, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

751 Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если: а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$; б) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, а векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны.

752 Верно ли утверждение: а) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; б) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; г) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$; д) если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$?

§2 Сложение и вычитание векторов

82 Сумма двух векторов

Рассмотрим пример. Пусть материальная точка переместилась из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C (рис. 249). В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, материальная точка переместилась из точки A в точку C. Поэтому результирующее перемещение можно представить вектором $\overrightarrow{AC}$. Поскольку перемещение из точки A в точку C складывается из перемещения из A в B и перемещения из B в C, то вектор $\overrightarrow{AC}$ естественно назвать суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

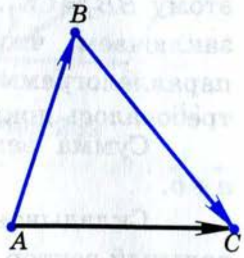


Рис. 249

Рассмотренный пример приводит нас к понятию суммы двух векторов.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$ (рис. 250). Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

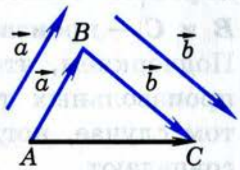
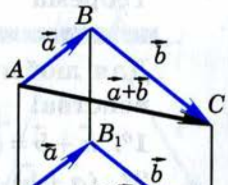


Рис. 250

Такое правило сложения векторов называется **правилом треугольника**. Рисунок 250 поясняет это название.

Докажем, что если при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точку A, от которой откладывается вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, заменить другой точкой A_1, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$. Иными словами, докажем, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 251).



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1} = \vec{a} + \vec{b}$

Рис. 251

Допустим, что точки A, B, A_1, точки B, C, B_1 и точки A, C, A_1 не лежат на одной прямой (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ следует, что стороны AB и A_1B_1 четырёхугольника ABB_1A_1 равны и параллельны, поэтому этот четырёхугольник —

параллелограмм. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$. Аналогично из равенства $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ следует, что четырёхугольник BCC_1B_1 — параллелограмм. Поэтому $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$. На основе полученных равенств заключаем, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Поэтому AA_1C_1C — параллелограмм, и, значит, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, что и требовалось доказать.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} + \vec{b}$.

Складывая по правилу треугольника произвольный вектор $\vec{a}$ с нулевым вектором, получаем, что **для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство**

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Правило треугольника можно сформулировать также следующим образом: **если A, B и C — произвольные точки, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.** Подчеркнём, что это равенство справедливо для произвольных точек A, B и C, в частности, в том случае, когда две из них или даже все три совпадают.

83 Законы сложения векторов. Правило параллелограмма

Теорема

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:

1°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон).

2°. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).

Доказательство

1°. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (случай коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ рассмотрите самостоятельно). От произвольной точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и на этих векторах построим параллелограмм $ABCD$, как показано на рисунке 252. По правилу треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Аналогично $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Отсюда следует, что $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

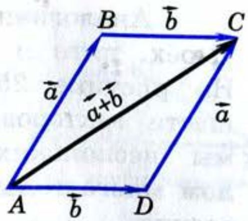


Рис. 252

2^0. От произвольной точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, от точки B — вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, а от точки C — вектор $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ (рис. 253). Применяя правило треугольника, получим:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Отсюда следует, что $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$. **Теорема доказана.**

При доказательстве утверждения 1^0 мы обосновали так называемое **правило параллелограмма** сложения неколлинеарных векторов: чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 252). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ равен $\vec{a} + \vec{b}$. Правило параллелограмма часто используется в физике, например при сложении двух сил.

84 Сумма нескольких векторов

Сложение нескольких векторов производится следующим образом: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма складывается с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются. На рисунке 253 показано построение суммы векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: от произвольной точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, затем от точки B отложен вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ и, наконец, от точки C отложен вектор $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. В результате получается вектор $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

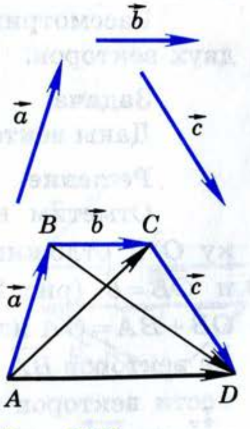
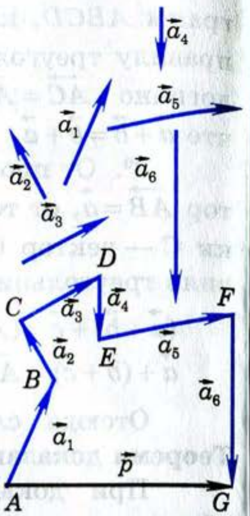


Рис. 253

Аналогично можно построить сумму четырёх, пяти и вообще любого числа векторов. На рисунке 254 показано построение суммы шести векторов. Это правило построения суммы нескольких векторов называется **правилом многоугольника**. Рисунок 254 поясняет название.

Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если A_1, A_2, ..., A_n — произвольные точки плоскости, то $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$ (на рисунке 255, *а* $n = 7$). Это равенство справедливо для любых точек A_1, A_2, ..., A_n, в частности в том случае, когда некоторые из них совпадают. Например, если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору (рис. 255, *б*).



$\vec{p} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 + \vec{a}_6$

Рис. 254

85 Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **называется** такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.

Рассмотрим задачу о построении разности двух векторов.

Задача

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

Решение

Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 256). По правилу треугольника $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ или $\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a}$. Таким образом, сумма векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}$ равна $\vec{a}$. По определению разности векторов это означает, что $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, т. е. вектор $\overrightarrow{BA}$ искомый. Задачу о построении разно-

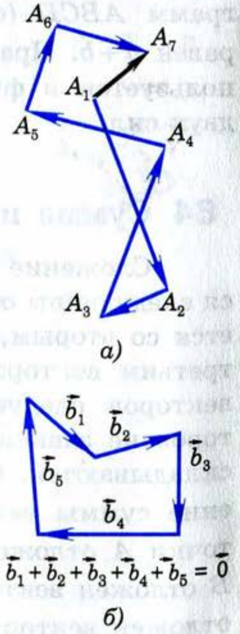


Рис. 255

сти двух векторов можно решить и другим способом. Прежде чем указать этот способ, введём понятие вектора, противоположного данному.

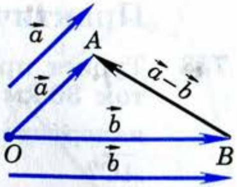


Рис. 256

Пусть $\vec{a}$ — произвольный ненулевой вектор. Вектор $\vec{a_1}$ называется **противоположным** вектору $\vec{a}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{a_1}$ имеют равные длины и противоположно направлены. На рисунке 257 вектор $\vec{a_1} = \overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор.

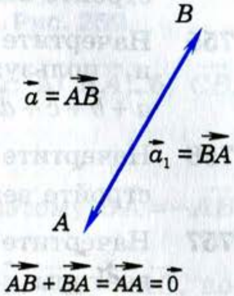


Рис. 257

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается так: $-\vec{a}$. Очевидно, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Докажем теперь теорему о разности двух векторов.

Теорема

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Доказательство

По определению разности векторов $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}$. Прибавив к обеим частям этого равенства вектор $(-\vec{b})$, получим:

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

$$\text{или } (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{0} = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

откуда $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. **Теорема доказана.**

Приведём теперь другое решение задачи о построении разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 258). Затем от точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$. По теореме о разности векторов $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, поэтому $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, т. е. вектор $\overrightarrow{OB}$ искомый.

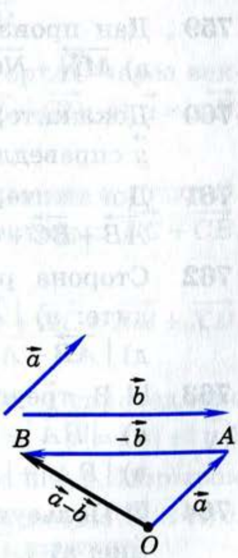


Рис. 258

Практические задания

753 Турист прошёл 20 км на восток из города A в город B, а потом 30 км на восток в город C. Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$?

754 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}+\vec{z}$, $\vec{z}+\vec{y}$.

755 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ и, пользуясь правилом многоугольника, постройте вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$.

756 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{z}-\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{z}$, $-\vec{x}$, $-\vec{y}$, $-\vec{z}$.

757 Начертите векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{z}$. Постройте векторы $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}-\vec{z}$, $\vec{x}+\vec{z}$.

758 Начертите два ненулевых коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$. Постройте векторы: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $-\vec{a}+\vec{b}$. Выполните ещё раз построение для случая, когда $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Задачи

759 Дан произвольный четырёхугольник $MNPQ$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QP}$.

760 Докажите, что для любых двух неколлинеарных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо неравенство $|\vec{x}+\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

761 Докажите, что если A, B, C, и D — произвольные точки, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

762 Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$; г) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; д) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

763 В треугольнике ABC $AB=6$, $BC=8$, $\angle B=90°$. Найдите: а) $|\overrightarrow{BA}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{BA}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$.

764 Пользуясь правилом многоугольника, упростите выражение: а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{KD})$; б) $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD})$.

765 Пусть X, Y и Z — произвольные точки. Докажите, что векторы $\vec{p} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{YZ}$, $\vec{q} = (\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{XZ}) + \overrightarrow{YZ}$ и $\vec{r} = (\overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XY}) - \overrightarrow{ZX}$ нулевые.

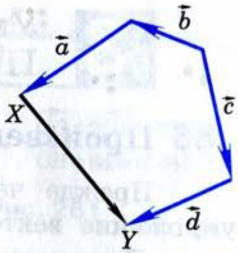


Рис. 259

766 На рисунке 259 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\overrightarrow{XY}$. Представьте вектор $\overrightarrow{XY}$ в виде суммы остальных или им противоположных векторов.

767 Дан треугольник ABC. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ следующие векторы: а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Решение

а) Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$ — противоположные, поэтому $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

б) По правилу треугольника $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$. Но $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, поэтому $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}$.

768 Точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

769 Отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{x} = \overrightarrow{AB_1}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{AB}$.

770 Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$; б) $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$; в) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$.

771 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ векторы: $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$.

772 Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$, где X — произвольная точка плоскости.

773 Докажите, что для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо неравенство $|\vec{x} - \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$. В каком случае $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$?

774 Парашютист спускался на землю со скоростью 3 м/с. Порывом ветра его начинает относить в сторону со скоростью $3\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к вертикали спускается парашютист?

§3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

86 Произведение вектора на число

Прежде чем ввести ещё одно действие — умножение вектора на число, обратимся к примеру. Представим себе, что один автомобиль движется прямолинейно с постоянной скоростью, второй автомобиль движется в том же направлении со скоростью, вдвое большей, а третий автомобиль движется им навстречу, т. е. в противоположном направлении, и величина его скорости такая же, как у второго автомобиля. Если мы изобразим скорость первого автомобиля вектором $\vec{v}$ (рис. 260, *а*), то естественно изобразить скорость второго автомобиля вектором, у которого направление такое же, как у вектора $\vec{v}$, а длина в два раза больше, и обозначить этот вектор $2\vec{v}$. Скорость третьего автомобиля изобразится вектором, противоположным вектору $2\vec{v}$, т. е. вектором $-2\vec{v}$ (см. рис. 260, *а*). Естественно считать, что вектор $2\vec{v}$ получается умножением вектора $\vec{v}$ на число 2, а вектор $-2\vec{v}$ получается умножением вектора $\vec{v}$ на число −2. Этот пример подсказывает, каким образом следует ввести умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geqslant 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. На рисунке 260, *б* изображены вектор $\vec{a}$ и векторы $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $\sqrt{2}\,\vec{a}$.

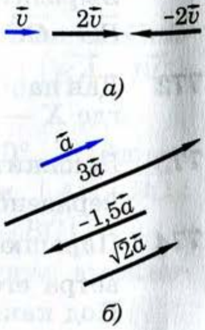


Рис. 260

Из определения произведения вектора на число непосредственно следует, что:

1) произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;

2) для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.

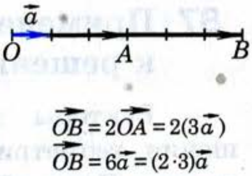


Рис. 261

Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами:

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1^0. $(kl)\,\vec{a} = k\,(l\vec{a})$ (сочетательный закон).

2^0. $(k+l)\,\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон).

3^0. $k\,(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).

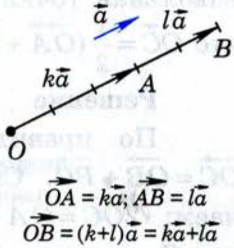


Рис. 262

Рисунок 261 иллюстрирует сочетательный закон. На этом рисунке представлен случай, когда $k=2$, $l=3$.

Рисунок 262 иллюстрирует первый распределительный закон. Этот рисунок соответствует случаю, когда $k=3$, $l=2$.

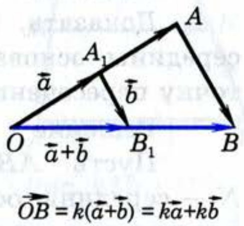


Рис. 263

Рисунок 263 иллюстрирует второй распределительный закон. На этом рисунке треугольники OAB и OA_1B_1 подобны с коэффициентом подобия k, поэтому $\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = k\,(\vec{a}+\vec{b})$. С другой стороны, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{a} + k\vec{b}$. Таким образом, $k\,(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Замечание

Рассмотренные нами свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например, выражение $\vec{p} = 2\,(\vec{a}-\vec{b}) + (\vec{c}+\vec{a}) - 3\,(\vec{b}-\vec{c}+\vec{a})$ можно преобразовать так:

$$\vec{p} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} = -5\vec{b} + 4\vec{c}.$$

87 Применение векторов к решению задач

Векторы могут использоваться для решения геометрических задач и доказательства теорем. Приведём примеры. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу.

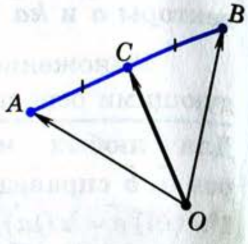


Рис. 264

Задача 1

Точка C — середина отрезка AB, а O — произвольная точка плоскости (рис. 264). Доказать, что $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

Решение

По правилу треугольника $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$. Складывая эти равенства, получаем: $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$. Так как точка C — середина отрезка AB, то $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$. Таким образом, $2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, или

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

Задача 2

Доказать, что прямая, проведённая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.

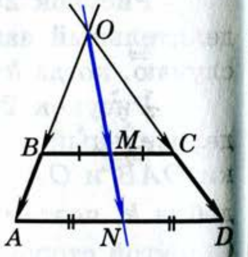


Рис. 265

Решение

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, M и N — середины оснований BC и AD, а O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 265). Докажем, что точка O лежит на прямой MN.

Треугольники OAD и OBC подобны по первому признаку подобия треугольников (докажите это), поэтому $\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OC}=k$.

Так как $\overrightarrow{OB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OD}$, то

$$\overrightarrow{OA}=k\cdot\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OD}=k\cdot\overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Точка M — середина отрезка BC, поэтому $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$. Аналогично $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})$.

Подставив в это равенство выражения (1) для $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$, получим:

$$\overrightarrow{ON} = k \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, и, значит, точка O лежит на прямой MN.

88 Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. Докажем теорему о средней линии трапеции.

Теорема

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 266). Докажем, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD + BC}{2}$.

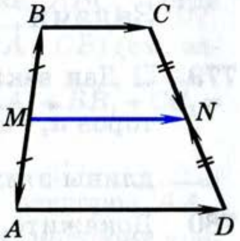


Рис. 266

По правилу многоугольника $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. Сложив эти равенства, получим:

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}).$$

Но M и N — середины сторон AB и CD, поэтому $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. Следовательно, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, откуда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ также сонаправлены, а длина вектора $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ равна $AD + BC$. Отсюда следует, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD + BC}{2}$.

Теорема доказана.

Практические задания

775 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, начала которых не совпадают, и отметьте какую-нибудь точку O. От точки O отложите векторы, равные $2\vec{p}$ и $\frac{1}{2}\vec{q}$.

776 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и постройте векторы: а) $\vec{x}+2\vec{y}$; б) $\frac{1}{2}\vec{y}+\vec{x}$; в) $3\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; г) $1\frac{1}{2}\vec{x}-3\vec{y}$; д) $0\vec{x}+4\vec{y}$; е) $-2\vec{x}+0\vec{y}$. Выполните задания а) — е) для двух коллинеарных ненулевых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

777 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, начала которых не совпадают. Постройте векторы $\vec{m}=2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{l}=-2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{s}=\frac{2}{3}\vec{q}-\vec{p}$.

778 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Постройте векторы: а) $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

Задачи

779 Дан вектор $\vec{p}=3\vec{a}$, где $\vec{a}\neq\vec{0}$. Как направлен каждый из векторов $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $6\vec{a}$ по отношению к вектору $\vec{p}$? Выразите длины этих векторов через $|\vec{p}|$.

780 Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства: а) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; б) $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

781 Пусть $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$. Выразите через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы: а) $2\vec{x}-2\vec{y}$; б) $2\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; в) $-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

782 В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AD, точка G — середина стороны BC. Выразите векторы $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AG}$ через векторы $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

783 Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причём $BM : MC = 3 : 1$. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

784 В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а M — такая точка на стороне AD, что $AM=\frac{1}{2}MD$.

Выразите через векторы $\vec{x}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$ следующие векторы:
а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$;
б) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$.

785 Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}).$$

786 Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

787 Точка O — середина медианы EG треугольника DEF. Выразите вектор $\overrightarrow{DO}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{ED}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{EF}$.

Применение векторов к решению задач

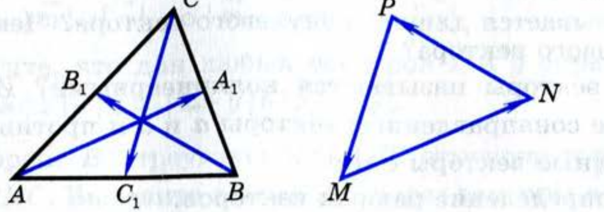
788 Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам треугольника ABC.

Решение

Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Тогда $\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$, $\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$ (см. задачу 1, п. 87). Сложив эти равенства, получим $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=$
$=\frac{1}{2}((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}))=\vec{0}$.

Отсюда следует, что если мы построим сумму векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ по правилу многоугольника (п. 84), то получим треугольник, удовлетворяющий условиям задачи (треугольник MNP на рисунке 267).

789 На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.



$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AA_1}$,
$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BB_1}$,
$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{CC_1}$

Рис. 267

790 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований.

791 Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырёхугольника, точкой пересечения делятся пополам.

792 Докажите теорему о средней линии треугольника (п. 64).

Средняя линия трапеции

793 ☐ Боковые стороны трапеции равны 13 см и 15 см, а периметр равен 48 см. Найдите среднюю линию трапеции.

794 ☐ Сторона AB треугольника ABC разделена на четыре равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC. Стороны AB и AC треугольника отсекают на этих параллельных прямых три отрезка, наименьший из которых равен 3,4 см. Найдите два других отрезка.

795 ☐ Найдите диаметр окружности, если его концы удалены от некоторой касательной на 18 см и 12 см.

796 ☐ Из концов диаметра CD данной окружности проведены перпендикуляры CC_1 и DD_1 к касательной, не перпендикулярной к диаметру CD. Найдите DD_1, если $CC_1 = 11$ см, а $CD = 27$ см.

797 Докажите, что средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.

798 ☐ Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 48 см, а средняя линия делится диагональю на два отрезка, равные 11 см и 35 см. Найдите углы трапеции.

799 ☐ Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Перпендикуляр, проведённый из вершины B к большему основанию AD, делит это основание на два отрезка, больший из которых равен 7 см. Найдите среднюю линию трапеции.

Вопросы для повторения к главе IX

1 Приведите примеры векторных величин, известных вам из курса физики.

2 Дайте определение вектора. Объясните, какой вектор называется нулевым.

3 Что называется длиной ненулевого вектора? Чему равна длина нулевого вектора?

4 Какие векторы называются коллинеарными? Изобразите на рисунке сонаправленные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и противоположно направленные векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

5 Дайте определение равных векторов.

6 Объясните смысл выражения: «Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A». Докажите, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

7 Объясните, какой вектор называется суммой двух векторов. В чём заключается правило треугольника сложения двух векторов?

8 Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

9 Сформулируйте и докажите теорему о законах сложения векторов.

10 В чём заключается правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов?

11 В чём заключается правило многоугольника сложения нескольких векторов?

12 Какой вектор называется разностью двух векторов? Постройте разность двух данных векторов.

13 Какой вектор называется противоположным данному? Сформулируйте и докажите теорему о разности векторов.

14 Какой вектор называется произведением данного вектора на данное число?

15 Чему равно произведение $k\vec{a}$, если: а) $\vec{a}=\vec{0}$; б) $k=0$?

16 Могут ли векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ быть неколлинеарными?

17 Сформулируйте основные свойства умножения вектора на число.

18 Приведите пример применения векторов к решению геометрических задач.

19 Какой отрезок называется средней линией трапеции?

20 Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции.

Дополнительные задачи

800 Докажите, что если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, то $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|+|\vec{n}|$, а если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены, причём $|\vec{m}|\geqslant|\vec{n}|$, то $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|-|\vec{n}|$.

801 Докажите, что для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливы неравенства $|\vec{x}|-|\vec{y}|\leqslant|\vec{x}+\vec{y}|\leqslant|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

802 На стороне BC треугольника ABC отмечена точка N так, что $BN=2NC$. Выразите вектор $\overrightarrow{AN}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$.

803 На сторонах MN и NP треугольника MNP отмечены соответственно точки X и Y так, что $\frac{MX}{XN}=\frac{3}{2}$ и $\frac{NY}{YP}=\frac{3}{2}$. Выразите векторы $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{MP}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{NM}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{NP}$.

804 Основание AD трапеции $ABCD$ в три раза больше основания BC. На стороне AD отмечена такая точка K, что $AK=\frac{1}{3}AD$. Выразите векторы $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{KD}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CD}$.

805 Три точки A, B и C расположены так, что $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OC}.$$

806 Точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OC}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

807 Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, O — произвольная точка. Докажите, что

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}.$$

808* Точки A и C — середины противоположных сторон произвольного четырёхугольника, а точки B и D — середины двух других его сторон. Докажите, что для любой точки O верно равенство

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}.$$

809 Один из углов прямоугольной трапеции равен 120°. Найдите её среднюю линию, если меньшая диагональ и бóльшая боковая сторона трапеции равны a.

810 Докажите, что вершина угла, образованного биссектрисами двух углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на прямой, содержащей среднюю линию трапеции.

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе V

811 Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны. Докажите, что

$$A_1A_2 - A_4A_5 = A_5A_6 - A_2A_3 = A_3A_4 - A_6A_1.$$

812 Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 удовлетворяют условиям $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$. Докажите, что существует выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны, причём $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_4 = a_3$, $A_4A_5 = a_4$, $A_5A_6 = a_5$ и $A_6A_1 = a_6$.

813 Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму произвольного выпуклого четырёхугольника, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

814 Докажите, что диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются.

815 Докажите, что в любом четырёхугольнике какие-то две противоположные вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.

816 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Прямая, проведённая через точку D перпендикулярно к AD, пересекает прямую AC в точке E. Точки M и K — основания перпендикуляров, проведённых из точек B и D к прямой AC. Найдите MK, если $AE = a$.

817 Докажите, что в треугольнике сумма трёх медиан меньше периметра, но больше половины периметра.

818 Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника, периметры которых равны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

819 Найдите множество середин всех отрезков, соединяющих данную точку со всеми точками данной прямой, не проходящей через эту точку.

820 Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, перпендикулярна к основаниям. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

821 При пересечении биссектрис всех углов прямоугольника образовался четырёхугольник. Докажите, что этот четырёхугольник — квадрат.

822 На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих квадратов являются вершинами квадрата.

823 На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Биссектриса угла BAM пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $AM = BK + DM$.

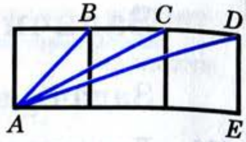


Рис. 268

824 На рисунке 268 изображены три квадрата. Найдите сумму $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE$.

825 Внутри квадрата $ABCD$ взята такая точка M, что $\angle MAB = 60°$, $\angle MCD = 15°$. Найдите $\angle MBC$.

826 На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BCDE$, $ACTM$, $BAHK$, а затем параллелограммы $TCDQ$ и $EBKP$. Докажите, что треугольник APQ прямоугольный и равнобедренный.

827 Постройте равнобедренную трапецию по основаниям и диагонали.

828 Докажите, что если треугольник имеет: а) ось симметрии, то он равнобедренный; б) более чем одну ось симметрии, то он равносторонний.

Задачи к главе VI

829 Через точку M, лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам и пересекающие стороны AB, BC, CD и DA соответственно в точках P, Q, R и T. Докажите, что если точка M лежит на диагонали AC, то площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны и, обратно, если площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны, то точка M лежит на диагонали AC.

830 На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K. Отрезки AK и BM пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника CMK, если площади треугольников OMA, OAB и OBK равны соответственно S_1, S_2, S_3.

831 На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и K, а на отрезке MK — точка P так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{CK}{KB} = \frac{MP}{PK}$. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников AMP и BKP равны S_1 и S_2.

832 Точки P, Q, R и T соответственно — середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Докажите, что при пересечении прямых AQ, BR, CT и DP образуется параллелограмм, и найдите отношение его площади к площади параллелограмма $ABCD$.

833 Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, проведённый из середины другой боковой стороны к прямой, содержащей первую боковую сторону.

834 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

835 Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые делят трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника равна сумме площадей трёх треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции.

836 Прямая, проходящая через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках M и K. Докажите, что площади треугольников DCM и AKB равны.

837 Сторона AB параллелограмма $ABCD$ продолжена за точку B на отрезок BE, а сторона AD продолжена за точку D на отрезок DK. Прямые ED и KB пересекаются в точке O. Докажите, что площади четырёхугольников $ABOD$ и $CEOK$ равны.

838 Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника на три равные части. Докажите, что площадь той части четырёхугольника, которая заключена между этими отрезками, в три раза меньше площади самого четырёхугольника.

839 Середины K и M сторон AB и DC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соединены отрезками KD, KC, MA и MB соответственно с его вершинами. Докажите, что площадь четырёхугольника, заключённого между этими отрезками, равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к сторонам AD и BC.

840 Точка A лежит внутри угла, равного 60°. Расстояния от точки A до сторон угла равны a и b. Найдите расстояние от точки A до вершины угла.

841 Прямая, проходящая через вершину C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AB и AD в точках K и M. Найдите площадь этого параллелограмма, если площади треугольников KBC и CDM равны соответственно S_1 и S_2.

842 Через точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезок AB в точке M и отрезок CD в точке K. Прямая, проведённая через точку K параллельно отрезку AB, пересекает отрезок BD в точке T, а прямая, проведённая через точку M параллельно отрезку CD, пересекает отрезок AC в точке E. Докажите, что прямые BE и CT параллельны.

843 Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку A на отрезок AD, равный AC. На лучах BA и BC взяты точки K и M так, что площади треугольников BDM и BCK равны. Найдите угол BKM, если $\angle BAC = \alpha$.

844 Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Известно, что $MB = a$, $MC = b$ и $MD = c$. Найдите длину отрезка MA.

845 В треугольнике ABC проведена высота BD. Отрезок KA перпендикулярен к отрезку AB и равен отрезку DC, отрезок CM перпендикулярен к отрезку BC и равен отрезку AD. Докажите, что отрезки MB и KB равны.

846 Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка O так, что справедливо равенство $S_{OAB} = S_{OAC} = S_{OBC}$. Докажите, что справедливо равенство $OA^2 + OB^2 = 5OC^2$.

Задачи к главе VII

847 На рисунке 269 изображён правильный пятиугольник $ABCDE$, т. е. выпуклый пятиугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. Докажите, что:

а) $\triangle AED \sim \triangle AFE$; б) $\dfrac{DA}{DF} = \dfrac{DF}{AF}$.

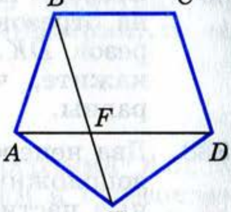


Рис. 269

848 В треугольнике ABC $(AB \neq AC)$ через середину M стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD = CE$.

849 Докажите, что отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, в котором эти высоты являются биссектрисами.

850 Точки E и F лежат на стороне AB треугольника ABC, причём точка E лежит на отрезке AF и $AE = BF$. Прямая, проведённая через точку E параллельно стороне AC, пересекает прямую, проведённую через точку F параллельно стороне BC, в точке K. Докажите, что точка K лежит на медиане треугольника ABC, проведённой к стороне AB.

851 Гипотенуза прямоугольного треугольника является стороной квадрата, не перекрывающегося с этим треугольником. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до вершины прямого угла треугольника, если сумма катетов равна a.

852 В треугольнике ABC $\angle A = \dfrac{180°}{7}$ и $\angle B = \dfrac{360°}{7}$. Докажите, что $\dfrac{1}{BC} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AB}$.

853 Из точки M внутренней области угла AOB проведены перпендикуляры MP и MQ к его сторонам OA и OB. Из точек P и Q проведены перпендикуляры PR и QS соответственно к OB и OA. Докажите, что $RS \perp OM$.

854 В равнобедренном треугольнике ABC из середины D основания AC проведён перпендикуляр DH к стороне BC. Пусть M — середина отрезка DH. Докажите, что $BM \perp AH$.

855 Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведён перпендикуляр CD к гипотенузе, а из точки D — перпендикуляры DE и DF к катетам AC и BC. Докажите, что:

а) $CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF$;

б) $AE^2 + BF^2 + 3CD^2 = AB^2$;

в) $\sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{BF^2} = \sqrt[3]{AB^2}$.

856 Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известно, что $\angle ADP = \frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP = \frac{2}{3}\angle PAD$ и $AD = BD = CD$. а) Найдите все углы четырёхугольника. б) Докажите, что $AB^2 = BP \cdot BD$.

857 Точка M не лежит на прямых, содержащих стороны параллелограмма $ABCD$. Докажите, что существуют точки N, P и Q, расположенные так, что A, B, C и D являются соответственно серединами отрезков MN, NP, PQ и QM.

858 Докажите, что если противоположные стороны выпуклого четырёхугольника не параллельны, то их полусумма больше отрезка, соединяющего середины двух других противоположных сторон.

859 Докажите, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна половине его периметра, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

860 Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.

861 Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Треугольник ABO, где AB — меньшее основание трапеции, равносторонний. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины отрезков OA, OD и BC, равносторонний.

862 Из вершины A треугольника ABC проведены перпендикуляры AM и AK к биссектрисам внешних углов этого треугольника при вершинах B и C. Докажите, что отрезок MK равен половине периметра треугольника ABC.

863 Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 соединяют вершины треугольника ABC с внутренними точками противоположных сторон. Докажите, что середины этих отрезков не лежат на одной прямой.

864 Середины трёх высот треугольника лежат на одной прямой. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

865 В треугольнике ABC, сторона AC которого в два раза больше стороны BC, проведены биссектриса CM и биссектриса внешнего угла при вершине C, пересекающая прямую AB в точке K. Докажите, что

$$S_{BCM} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{CMK}.$$

866 Стороны треугольника EFG соответственно равны медианам треугольника ABC. Докажите, что $\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

867 В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A и делящая медиану BM в отношении $1 : 2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.

868 Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые BD, CD и BC соответственно в точках M, N и P. Докажите, что отрезок AM является средним пропорциональным между MN и MP.

869 Постройте точку, принадлежащую большему основанию равнобедренной трапеции и отстоящую от данной боковой стороны в n раз дальше, чем от другой ($n = 2, 3, 4$).

870 Точка C лежит на отрезке AB. Постройте точку D прямой AB, не лежащую на отрезке AB, так, чтобы $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$. Всегда ли задача имеет решение?

871 Постройте равнобедренный треугольник по углу между боковыми сторонами и сумме основания и высоты, проведённой к основанию.

872 Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.

873 Постройте треугольник ABC, если даны $\angle A$, $\angle C$ и отрезок, равный сумме стороны AC и высоты BH.

874 Постройте треугольник по трём высотам.

875 Постройте трапецию по боковой стороне, большему основанию, углу между ними и отношению двух других сторон.

876 Постройте ромб, площадь которого равна площади квадрата, если известно, что отношение диагоналей этого ромба равно отношению данных отрезков.

Задачи к главе VIII

877 Две окружности имеют единственную общую точку M. Через эту точку проведены две секущие, пересекающие одну окружность в точках A и A_1, а другую — в точках B и B_1. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

878 Прямая AC — касательная к окружности с центром O_1, а прямая BD — касательная к окружности с центром O_2 (рис. 270). Докажите, что:
а) $AD \parallel BC$;
б) $AB^2 = AD \cdot BC$;
в) $BD^2 : AC^2 = AD : BC$.

879 Точки B_1 и C_1 — середины дуг AB и AC (рис. 271). Докажите, что $AM = AN$.

880 Окружность отсекает на двух прямых, которые пересекаются в точке, не лежащей на окружности, равные хорды. Докажите, что расстояния от точки пересечения этих прямых до концов той и другой хорды соответственно равны между собой.

881 Докажите, что для всех хорд AB данной окружности величина $\frac{AB^2}{AD}$, где AD — расстояние от точки A до касательной в точке B, имеет одно и то же значение.

882 Через точку A пересечения двух окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 проведена прямая, пересекающая одну окружность в точке B, а другую — в точке C. Докажите, что отрезок BC будет наибольшим тогда, когда он параллелен прямой O_1O_2.

883 Отрезок AB является диаметром окружности с центром O. На каждом радиусе OM окружности отложен от центра O отрезок, равный расстоянию от конца M этого радиуса до прямой AB. Найдите множество концов построенных таким образом отрезков.

884 Внутри угла ABC равностороннего треугольника ABC взята точка M так, что $\angle BMC = 30°$, $\angle BMA = 17°$. Найдите углы BAM и BCM.

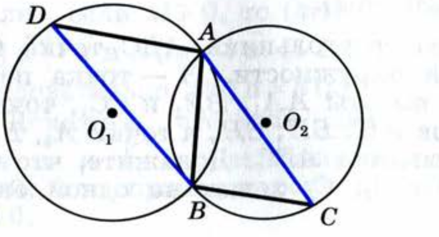


Рис. 270

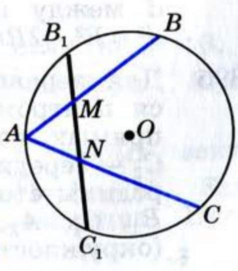


Рис. 271

885 Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла треугольника при этой вершине. Проведённые прямые, пересекаясь, образуют новый треугольник. Докажите, что вершины этого треугольника лежат на прямых, содержащих биссектрисы треугольника ABC.

886 Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC, а A', B', C' — точки, симметричные точке H относительно прямых BC, CA, AB. Докажите, что точки A', B', C' лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

887 Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

888 Из вершины B треугольника ABC проведены высота BH и биссектриса угла B, которая пересекает в точке E описанную около треугольника окружность с центром O. Докажите, что луч BE является биссектрисой угла OBH.

889 Произвольная точка X окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, соединена отрезками с его вершинами. Докажите, что один из отрезков AX, BX и CX равен сумме двух других отрезков.

890 Докажите, что если диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырёхугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

891 В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке, лежащей на стороне CD. Докажите, что $CD = BC + AD$.

892 Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению её оснований.

893 Докажите, что в любом четырёхугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

894 Докажите, что в любом треугольнике радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние d между центрами этих окружностей связаны равенством $d^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Эйлера).

895 Для неравностороннего треугольника ABC точка O является центром описанной окружности, H — точка пересечения прямых, содержащих высоты AA_1, BB_1 и CC_1, точки A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH, а точки A_3, B_3, C_3 — середины сторон треугольника ABC. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности (окружность Эйлера).

896 Докажите, что основания перпендикуляров, проведённых из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, к прямым, содержащим стороны этого треугольника, лежат на одной прямой (прямая Симпсона).

897 Постройте общую касательную к двум данным окружностям.

898 Даны окружность с центром O, точка M и отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте прямую p так, чтобы окружность отсекала на ней хорду, равную P_1Q_1, и расстояние от точки M до прямой p равнялось P_2Q_2.

899 Внутри окружности дана точка. Постройте хорду, проходящую через эту точку, так, чтобы она была наименьшей из всех хорд, проходящих через эту точку.

900 Постройте треугольник:

а) по стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой к данной стороне;

б) по углу, высоте, проведённой из вершины данного угла, и периметру.

901 Постройте треугольник, если дана описанная окружность и на ней точки A, B и M, через которые проходят прямые, содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведённые из одной вершины.

902 Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник, для которого эти точки являются основаниями высот. Сколько решений имеет задача?

Задачи к главе IX

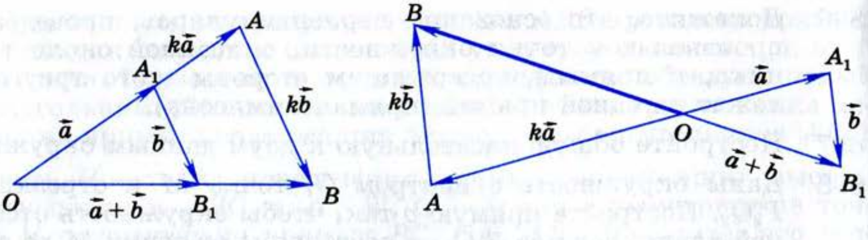
903 Докажите утверждения об основных свойствах умножения вектора на число (п. 86).

Решение

1. Докажем, что для любых чисел k, l и любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $(kl)\,\vec{a} = k\,(l\vec{a})$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Имеем: $|(kl)\,\vec{a}| = |kl|\,|\vec{a}| = |k|\,|l|\,|\vec{a}| = |k|\,|l\vec{a}| = |k\,(l\vec{a})|$.

Далее, если $kl \geqslant 0$, то $(kl)\,\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $k\,(l\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$; если же $kl < 0$, то $(kl)\,\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $k\,(l\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$. И в том и в другом случае $(kl)\,\vec{a} \uparrow\uparrow k\,(l\vec{a})$. Следовательно, $(kl)\,\vec{a} = k\,(l\vec{a})$.

2. Докажем, что для любого числа k и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $k\,(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$. Если $k = 0$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть $k \neq 0$.



$k>0$ $\qquad$ $k<0$

$\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ $\qquad$ $\overrightarrow{OB}=k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

Рис. 272 *а)* *б)*

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (случай $\vec{a}\parallel\vec{b}$ рассмотрите самостоятельно). Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OA}=k\vec{a}$, а от точек A_1 и A — векторы $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AB}=k\vec{b}$ (рис. 272, *а*, *б*). Треугольники OA_1B_1 и OAB подобны с коэффициентом подобия $|k|$. Следовательно, $\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OB_1}=k\,(\vec{a}+\vec{b})$. С другой стороны, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=k\vec{a}+k\vec{b}$. Итак, $k\,(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

3. Докажем, что для любых чисел k, l и любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $(k+l)\,\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$. Если $k=l=0$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть хотя бы одно из чисел k, l отлично от нуля. Для определённости будем считать, что $|k|\geqslant|l|$, и, следовательно, $k\neq0$ и $\left|\frac{l}{k}\right|\leqslant1$.

Рассмотрим вектор $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}$. Очевидно, $(\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a})\uparrow\uparrow\vec{a}$. Далее,

$$|\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}|=|\vec{a}|+\frac{l}{k}|\vec{a}|=\left(1+\frac{l}{k}\right)|\vec{a}|.$$

Следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{a}+\frac{l}{k}\vec{a}=\left(1+\frac{l}{k}\right)\vec{a}$. Умножая обе части этого равенства на k, получим, что справедливо равенство $k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\,\vec{a}$.

904 Даны четырёхугольник $MNPQ$ и точка O. Что представляет собой данный четырёхугольник, если $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$?

905 Даны четырёхугольник $ABCD$ и точка O. Точки E, F, G и H симметричны точке O относительно середин сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Что представляет собой четырёхугольник $EFGH$?

906 Дан треугольник ABC. Докажите, что вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ направлен вдоль биссектрисы угла A, а вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} - \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ — вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A.

907 Докажите следующее утверждение: три точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют числа k, l и m, одновременно не равные нулю, такие, что $k + 1 + m = 0$ и для произвольной точки O выполняется равенство $k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

908 Используя векторы, докажите, что середины диагоналей четырёхугольника и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

909 Биссектрисы внешних углов треугольника ABC при вершинах A, B и C пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Используя векторы, докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

910 Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты неравностороннего треугольника ABC, а O — центр описанной около этого треугольника окружности. Используя векторы, докажите, что точка G пересечения медиан треугольника принадлежит отрезку HO и делит этот отрезок в отношении $2 : 1$, считая от точки H, т. е. $\frac{HG}{GO} = 2$.