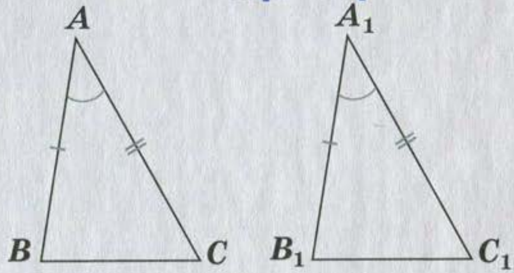
Геометрия

7
8
9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

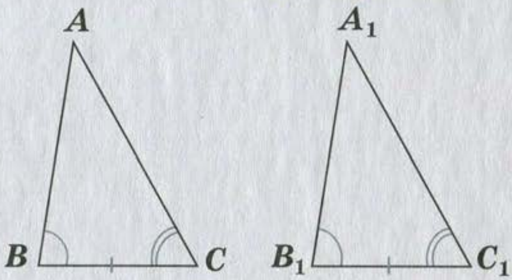
первый признак



Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

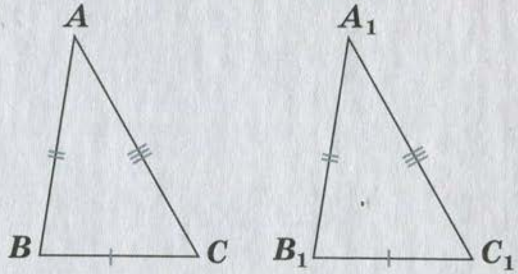
второй признак



Если $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

третий признак

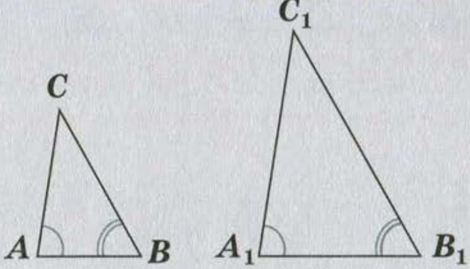


Если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$,

то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

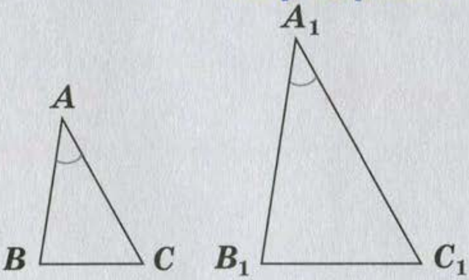
первый признак



Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

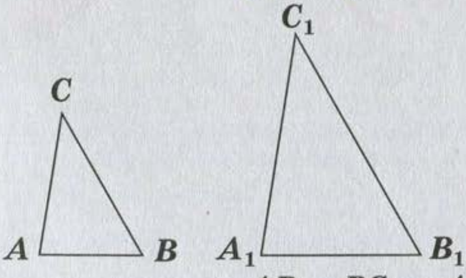
второй признак



Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

третий признак

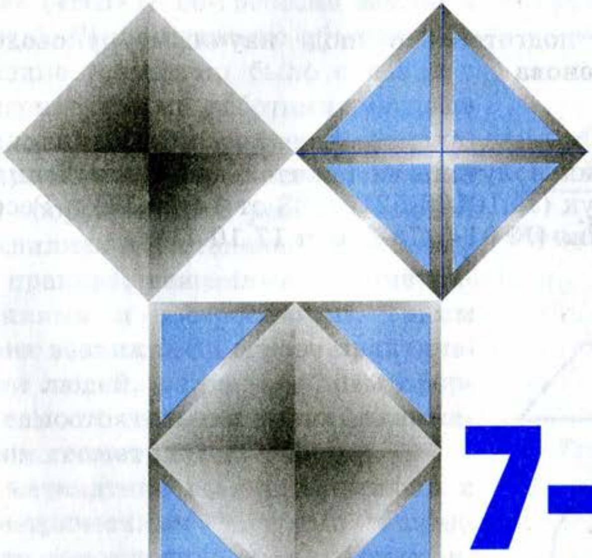


Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$,

то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

ФГОС

Геометрия



7–9
классы

Учебник для общеобразовательных организаций

2-е издание

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

Москва «Просвещение» 2014

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

Авторы: **Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина**

Издание подготовлено под научным руководством академика **А. Н. Тихонова**

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/583 от 14 10.11) и Российской академии образования (№ 01-5/7д-346 от 17.10.11)

Геометрия. 7—9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2014. — 383 с. : ил. — ISBN 978-5-09-032008-5.

Г36

Содержание учебника позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования. Учебник включает трёхступенчатую систему задач, а также исследовательские задачи, темы рефератов, список рекомендуемой литературы, что позволит учащимся расширить и углубить свои знания по геометрии.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-032008-5

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый предмет — геометрию и будете заниматься ею пять лет. Что это такое — геометрия?

Геометрия — одна из самых древних наук, она возникла очень давно, ещё до нашей эры. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» — по-гречески земля, а «метрео» — мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей, а в дальнейшем сформировалась как самостоятельная **наука, занимающаяся изучением геометрических фигур.**

Рис. 1

На уроках математики вы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и представляете себе, что такое точка, прямая, отрезок, луч, угол (рис. 1), как они могут быть расположены относительно друг друга. Вы знакомы с такими фигурами, как треугольник, прямоугольник, окружность, круг и др. (рис. 2); знаете, как измеряются отрезки с помощью линейки с миллиметровыми делениями и как измеряются углы с помощью транспортира. Но всё это лишь самые первые геометрические сведения. Теперь вам предстоит расширить и углубить ваши знания о геометрических фигурах. Вы познакомитесь с новыми фигурами и со многими важными и интересными свойствами уже известных вам фигур. Вы узнаете о том, как используются свойства геометрических фигур в практической деятельности. Во всём этом вам поможет учебник и, конечно, учитель.

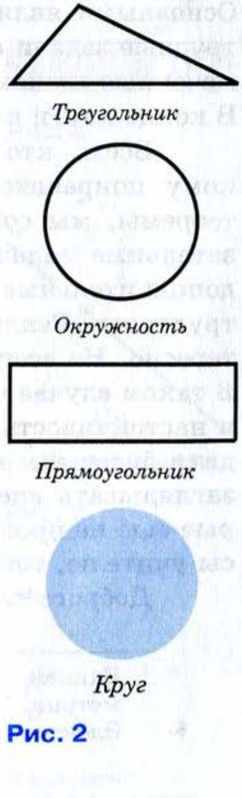
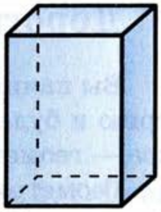
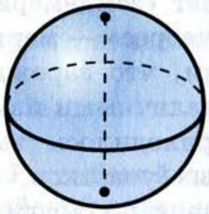


Рис. 2

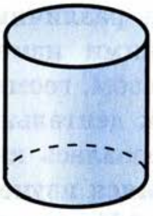
Школьный курс геометрии делится на **планиметрию** и **стереометрию**. В планиметрии рассматриваются свойства фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, треугольники, прямоугольники. В стереометрии изучаются свойства фигур в пространстве, таких, как параллелепипед, шар, цилиндр (рис. 3). Мы начнём изучение геометрии с планиметрии.



Прямоугольный параллелепипед



Шар



Цилиндр

Рис. 3

В процессе изучения геометрии вы будете доказывать **теоремы** и решать **задачи**. Что такое «теорема» и что значит «доказать теорему» — об этом вы скоро узнаете. Ну а что такое задача — вам известно, на уроках математики вы решали разные задачи.

В нашем учебнике геометрии много задач: есть задачи и практические задания к каждому параграфу, дополнительные задачи к каждой главе и, наконец, задачи повышенной трудности. Основными являются задачи к параграфу. Более трудные задачи отмечены звёздочкой. Задачи, отмеченные знаком ▢, имеют электронную версию[1]. В конце книги к задачам даны ответы и указания.

Всем, кто проявит интерес к геометрии, кому понравится решать задачи и доказывать теоремы, мы советуем порешать не только обязательные задачи, но и задачи со звёздочкой, дополнительные задачи и задачи повышенной трудности. Решать такие задачи непросто, но интересно. Не всегда удаётся сразу найти решение. В таком случае не унывайте, а проявите терпение и настойчивость. Радость от решения трудной задачи будет вам наградой за упорство. Не бойтесь заглядывать вперёд, читать те параграфы, которые ещё не проходили в классе. Задавайте вопросы учителю, товарищам, родителям.

Доброго вам пути, ребята!

---

1 Единая коллекция ЦОР. Набор ЦОР к учебнику «Геометрия. 7—9 классы» авторов Л. С. Атанасяна и др. Электронный адрес school-collection.edu.ru.

Глава I

Начальные геометрические сведения

В этой главе речь пойдёт о простейших геометрических фигурах — точках, прямых, отрезках, лучах, углах. С ними вы познакомились на уроках математики в 5 и 6 классах. К тому, что вы знаете об этих фигурах, мы добавим новые сведения, и они послужат нам опорой для изучения в следующих главах свойств более сложных фигур. Ещё мы расскажем о практических приложениях геометрии — о том, как геометрия помогает прокладывать прямолинейные дороги и как проводится измерение углов на местности.

§1 Прямая и отрезок

1 Точки, прямые, отрезки

Вспомним, что нам известно о точках и прямых. Мы знаем, что для изображения прямых на чертеже пользуются линейкой (рис. 4), но при этом можно изобразить лишь часть прямой, а всю прямую мы представляем себе простирающейся бесконечно в обе стороны.

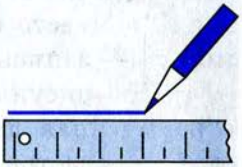
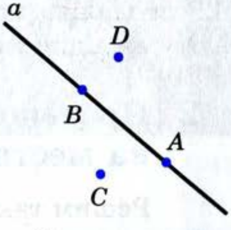


Рис. 4

Обычно прямые обозначают малыми латинскими буквами, а точки — большими латинскими буквами. На рисунке 5 изображены прямая a и точки A, B, C и D. Точки A и B лежат на прямой a, а точки C и D не лежат на этой прямой. Можно сказать, что прямая a проходит через точки A и B, но не проходит через точки C и D. Отметим, что через точки A и B нельзя провести другую прямую, не совпадающую с прямой a. Вообще,



Прямая и точки

Рис. 5

через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну[1].

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

Рассмотрим теперь две прямые. Если они имеют общую точку, то говорят, что эти прямые пересекаются. На рисунке 6 прямые a и b пересекаются в точке O, а прямые p и q не пересекаются. Две прямые не могут иметь двух и более общих точек. В самом деле, если бы две прямые имели две общие точки, то каждая из прямых проходила бы через эти точки. Но через две точки проходит только одна прямая. Таким образом, можно сделать вывод: **две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.**

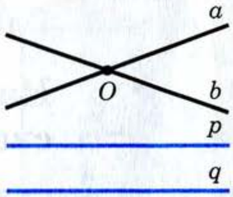


Рис. 6

Прямую, на которой отмечены две точки, например A и B, иногда обозначают двумя буквами: AB или BA. Для краткости вместо слов «точка A лежит на прямой a» используют запись $A \in a$, а вместо слов «точка B не лежит на прямой a» — запись $B \notin a$.

На рисунке 7, *а* выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**. На рисунке 7, *б* изображён отрезок с концами A и B. Такой отрезок обозначается AB или BA. Отрезок AB содержит точки A и B и все точки прямой AB, лежащие между A и B.

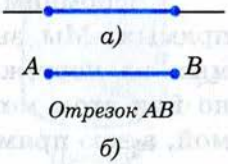


Рис. 7

2 Провешивание прямой на местности

Решим такую задачу: с помощью данной линейки построить отрезок более длинный, чем сама линейка. С этой целью приложим к листу бумаги линейку, отметим точки A и B и какую-нибудь точку C, лежащую между A и B (рис. 8, *а*). Затем

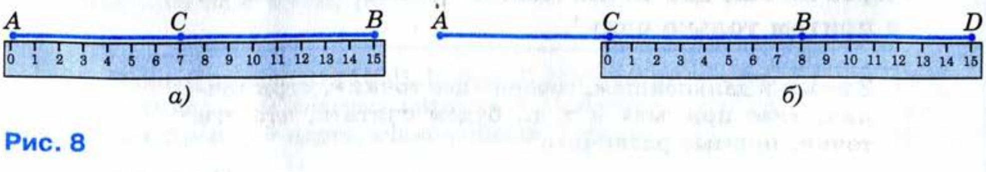


Рис. 8

передвинем линейку вправо так, чтобы её левый конец оказался около точки C, и отметим точку D около правого конца линейки (рис. 8, *б*). Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Если мы проведём теперь отрезок AB, а затем отрезок BD, то получим отрезок AD, более длинный, чем линейка.

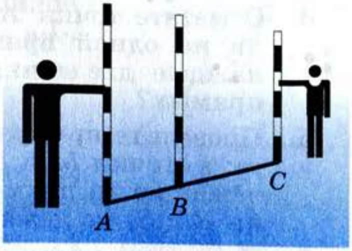
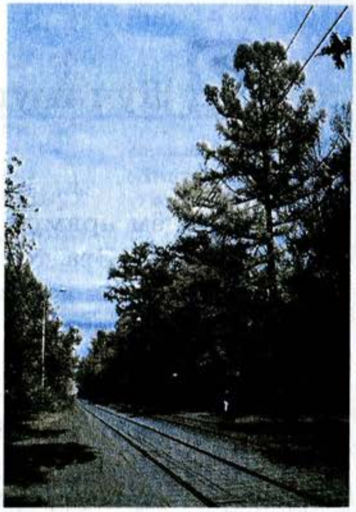


Рис. 9

Аналогичный приём используется для «проведения» длинных отрезков прямых на местности. Этот приём заключается в следующем. Сначала отмечают какие-нибудь точки A и B. Для этой цели используют две вехи — шесты длиной около 2 м, заострённые на одном конце для того, чтобы их можно было воткнуть в землю. Третью веху ставят так, чтобы вехи, стоящие в точках A и B, закрывали её от наблюдателя, находящегося в точке A (точка C на рисунке 9). Следующую веху ставят так, чтобы её закрывали вехи, стоящие в точках B и C, и т. д.



Описанный приём называется **провешиванием** прямой (от слова «веха»). Он широко используется на практике, например при рубке лесных просек, при прокладывании шоссейных или железных дорог, линий высоковольтных передач и т. д.

Практические задания

1 Проведите прямую, обозначьте её буквой a и отметьте точки A и B, лежащие на этой прямой, и точки P, Q и R, не лежащие на ней. Опишите взаимное расположение точек A, B, P, Q, R и прямой a, используя символы $\in$ и $\notin$.

2 Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и проведите прямые AB, BC и CA.

3 Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.

4 Отметьте точки A, B, C, D так, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой, а точка D не лежала на ней. Через каждые две точки проведите прямую. Сколько получилось прямых?

5 Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B. Отметьте: а) точки M и N, лежащие на отрезке AB; б) точки P и Q, лежащие на прямой a, но не лежащие на отрезке AB; в) точки R и S, не лежащие на прямой a.

6 Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой?

7 ☐ На рисунке 10 изображена прямая, на ней отмечены точки A, B, C и D. Назовите все отрезки: а) на которых лежит точка C; б) на которых не лежит точка B.

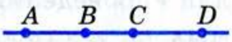
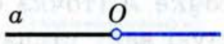


Рис. 10

§2 Луч и угол

3 Луч

Проведём прямую a и отметим на ней точку O (рис. 11). Эта точка разделяет прямую на две части, каждая из которых называется **лучом, исходящим из точки O** (на рисунке 11 один из лучей выделен цветной линией). Точка O называется **началом** каждого из лучей. Обычно луч обозначают либо малой латинской буквой (например, луч h на рисунке 12, *а*), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на луче (например, луч OA на рисунке 12, *б*).

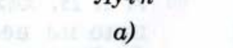


Точка O разделяет прямую на два луча

Рис. 11

Луч h

а)



Луч OA

б)

Рис. 12

4 Угол

Напомним, что **угол** — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**.

На рисунке 13 изображён угол с вершиной O и сторонами h и k. На сторонах отмечены точки A и B. Этот угол обозначают так: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$.

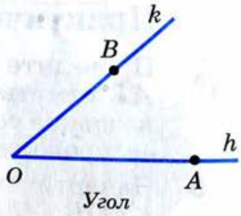


Рис. 13

Угол называется **развёрнутым,** если обе его стороны лежат на одной прямой. Можно сказать, что каждая сторона развёрнутого угла является продолжением другой стороны. На рисунке 14 изображён развёрнутый угол с вершиной C и сторонами p и q.

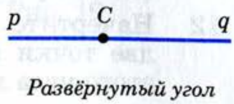


Рис. 14

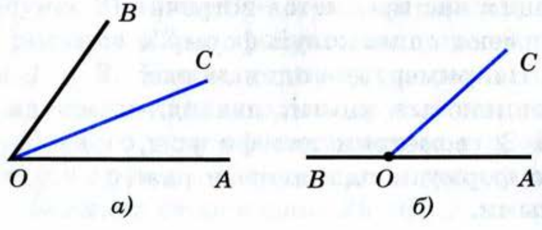
Любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвёрнутый, то одна из частей называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** этого угла (рис. 15, *а*). На рисунке 15, *б* изображён неразвёрнутый угол. Точки A, B, C лежат внутри этого угла (т. е. во внутренней области угла), точки D и E — на сторонах угла, а точки P и Q — вне угла (т. е. во внешней области угла).

Если угол развёрнутый, то любую из двух частей, на которые он разделяет плоскость, можно считать внутренней областью угла.

Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

Рис. 15

Если луч исходит из вершины неразвёрнутого угла и проходит внутри угла, то он делит этот угол на два угла. На рисунке 16, *а* луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Если угол AOB развёрнутый, то любой луч OC, не совпадающий с лучами OA и OB, делит этот угол на два угла: AOC и COB (рис. 16, *б*).



Луч OC делит угол AOB на два угла: ∠ AOC и ∠ COB

Рис. 16

Практические задания

8 Проведите прямую, отметьте на ней точки A и B и на отрезке AB отметьте точку C. а) Среди лучей AB, BC, CA, AC и BA назовите совпадающие лучи; б) назовите луч, который является продолжением луча CA.

9 Начертите три неразвёрнутых угла и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle hk$, $\angle M$.

10 Начертите два развёрнутых угла и обозначьте их буквами.

11 Начертите три луча h, k и l с общим началом. Назовите все углы, образованные данными лучами.

12 Начертите неразвёрнутый угол hk. Отметьте две точки внутри этого угла, две точки вне этого угла и две точки на сторонах угла.

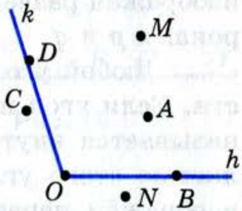


Рис. 17

13 Начертите неразвёрнутый угол. Отметьте точки A, B, M и N так, чтобы все точки отрезка AB лежали внутри угла, а все точки отрезка MN лежали вне угла.

14 Начертите неразвёрнутый угол AOB и проведите: а) луч OC, который делит угол AOB на два угла; б) луч OD, который не делит угол AOC на два угла.

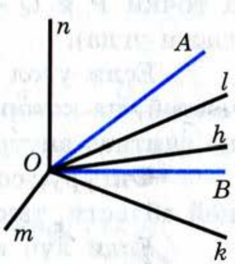


Рис. 18

15 ☐ Сколько неразвёрнутых углов образуется при пересечении двух прямых?

16 ☐ Какие из точек, изображённых на рисунке 17, лежат внутри угла hk, а какие — вне этого угла?

17 Какие из лучей, изображённых на рисунке 18, делят угол AOB на два угла?

§3 Сравнение отрезков и углов

5 Равенство геометрических фигур

Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму и одинаковые размеры. Например, два одинаковых листа бумаги, две одинаковые книги, два одинаковых автомобиля. В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными.

На рисунке 19 изображены фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$. Чтобы установить, равны они или нет, поступим так. Скопируем фигуру $Ф_1$ на кальку. Передвигая кальку и накладывая её на фигуру $Ф_2$ той или другой стороной, попытаемся совместить копию фигуры $Ф_1$ с фигурой $Ф_2$. Если они совместятся, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$.

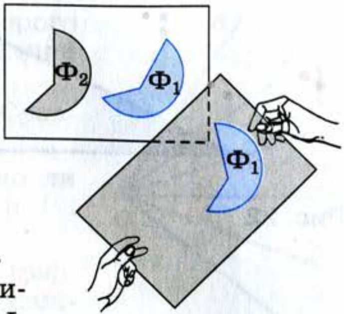


Рис. 19

Мы можем представить себе, что на фигуру $Ф_2$ накладывается не копия фигуры $Ф_1$, равная этой фигуре, а сама фигура $Ф_1$. Поэтому в дальнейшем будем говорить о наложении самой фигуры (а не копии) на другую фигуру. Итак, две геометрические фигуры называются **равными**, если их можно совместить наложением.

6 Сравнение отрезков и углов

На рисунке 20, *а* изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого (рис. 20, *б*). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся и, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого. На рисунке 20, *в* отрезок AC составляет часть отрезка AB, поэтому отрезок AC меньше отрезка AB (пишут так: $AC < AB$).

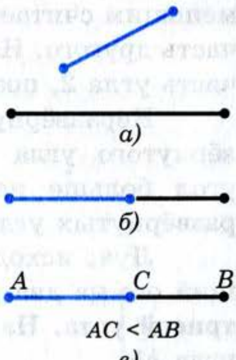
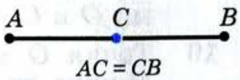


Рис. 20

Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, называется **серединой отрезка**. На рисунке 21 точка C — середина отрезка AB.



Точка C – середина отрезка AB

Рис. 21

На рисунке 22, *а* изображены неразвёрнутые углы 1 и 2. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один угол на другой так, чтобы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие оказались по одну сторону от совместившихся сторон (рис. 22, *б*).

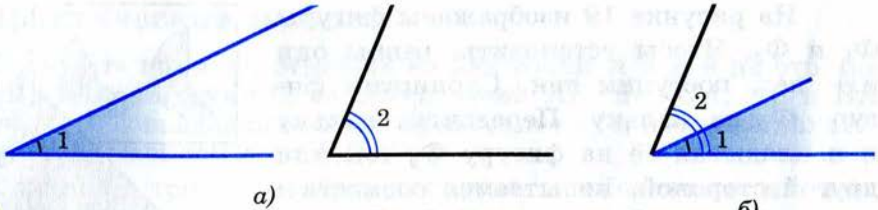


Рис. 22

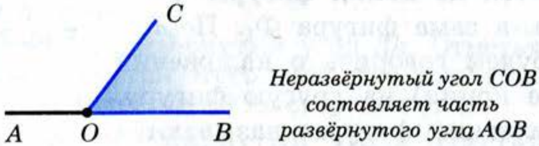


Рис. 23

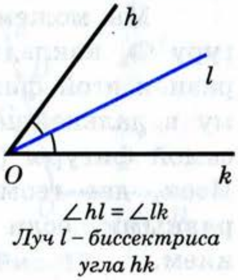


Рис. 24

Если две другие стороны также совместятся, то углы полностью совместятся и, значит, они равны. Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 22, *б* угол 1 составляет часть угла 2, поэтому $\angle 1 < \angle 2$.

Неразвёрнутый угол составляет часть развёрнутого угла (рис. 23), поэтому развёрнутый угол больше неразвёрнутого угла. Любые два развёрнутых угла, очевидно, равны.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой угла**. На рисунке 24 луч l — биссектриса угла hk.

Задачи

18 На луче с началом O отмечены точки A, B и C так, что точка B лежит между точками O и A, а точка A — между точками O и C. Сравните отрезки OB и OA, OC и OA, OB и OC.

19 Точка O является серединой отрезка AB. Можно ли совместить наложением отрезки: а) OA и OB; б) OA и AB?

Рис. 25

20 ☐ На рисунке 25 отрезки AB, BC, CD и DE равны. Укажите: а) середины отрезков AC,

AE и CE; б) отрезок, серединой которого является точка D; в) отрезки, серединой которых является точка C.

21 Луч OC делит угол AOB на два угла. Сравните углы AOB и AOC.

22 ☐ Луч l — биссектриса угла hk. Можно ли наложением совместить углы: а) hl и lk; б) hl и hk?

23 ☐ На рисунке 26 углы, обозначенные цифрами, равны. Укажите: а) биссектрису каждого из углов AOC, BOF, AOE; б) все углы, биссектрисой которых является луч OC.

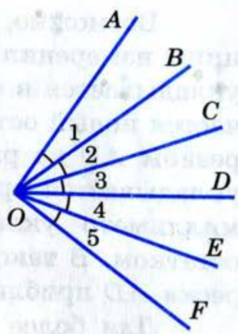


Рис. 26

§4 Измерение отрезков

7 Длина отрезка

На практике часто приходится измерять отрезки, т. е. находить их длины. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за **единицу измерения** (его называют также **масштабным отрезком**). Если, например, за единицу измерения принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. На рисунке 27 в отрезке AB сантиметр укладывается ровно два раза. Это означает, что длина отрезка AB равна 2 см. Обычно говорят кратко: «Отрезок AB равен 2 см» — и пишут: $AB = 2$ см.

Может оказаться так, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и определяют, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке. Например, на рисунке 27 в отрезке AC сантиметр укладывается 3 раза, и в остатке ровно 4 раза укладывается одна десятая часть сантиметра (миллиметр), поэтому длина отрезка AC равна 3,4 см.

$AB = 2$ *см*, $AC = 3{,}4$ *см*, $AD \approx 3{,}8$ *см*

Рис. 27

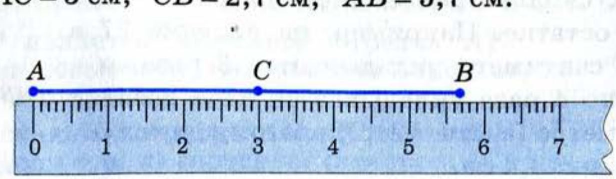
Возможно, однако, что и взятая часть единицы измерения (в данном случае миллиметр) не укладывается в остатке целое число раз, и получается новый остаток. Так будет, например, с отрезком AD на рисунке 27, в котором сантиметр укладывается три раза с остатком, а в остатке миллиметр укладывается восемь раз вновь с остатком. В таком случае говорят, что длина отрезка AD приближённо равна 3,8 см.

Для более точного измерения этого отрезка указанную часть единицы измерения (миллиметр) можно разделить на 10 равных частей и продолжить процесс измерения. Мысленно этот процесс можно продолжать и дальше, измеряя длину отрезка со всё большей точностью. На практике, однако, пользуются приближёнными значениями длин отрезков.

За единицу измерения можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок. **Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом.** Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в измеряемом отрезке.

Если два отрезка равны, то единица измерения и её части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. **равные отрезки имеют равные длины.** Если же один отрезок меньше другого, то единица измерения (или её часть) укладывается в этом отрезке меньшее число раз, чем в другом, т. е. **меньший отрезок имеет меньшую длину.**

На рисунке 28 изображён отрезок AB. Точка C делит его на два отрезка: AC и CB. Мы видим, что $AC = 3$ см, $CB = 2{,}7$ см, $AB = 5{,}7$ см.



$AC + CB = AB$

Рис. 28

Таким образом, $AC + CB = AB$. Ясно, что и во всех других случаях, **когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.**

Если длина отрезка CD в k раз больше длины отрезка AB, то пишут $CD = kAB$.

Длина отрезка называется также **расстоянием** между концами этого отрезка.

8 Единицы измерения. Измерительные инструменты

Для измерения отрезков и нахождения расстояний на практике используют различные единицы измерения. Стандартной международной единицей измерения отрезков выбран **метр** — отрезок, приближённо равный $\frac{1}{40\,000\,000}$ части земного меридиана. Эталон метра в виде специального металлического бруска хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Копии эталона хранятся в других странах, в том числе и в России. Один метр содержит сто сантиметров. В одном сантиметре десять миллиметров.

При измерении небольших расстояний, например расстояния между точками, изображёнными на листе бумаги, за единицу измерения принимают сантиметр или миллиметр. Расстояние между отдельными предметами в комнате измеряют в метрах, расстояние между населёнными пунктами — в **километрах**. Используются и другие единицы измерения, например **дециметр, морская миля** (1 миля равна 1,852 км). В астрономии для измерения очень больших расстояний за единицу измерения принимают **световой год**, т. е. путь, который свет проходит в течение одного года.

Мы назвали единицы измерения расстояний, которые используются на практике в наше время. В старину в разных странах существовали

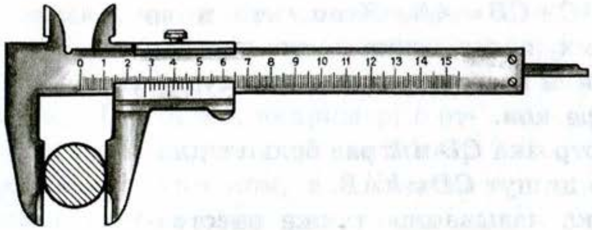


Рис. 29

Рис. 30

свои единицы измерения. Так, на Руси использовались аршин (0,7112 м), сажень (2,1336 м) и др.

На практике для измерения расстояний пользуются различными инструментами. Например, в техническом черчении употребляется **масштабная миллиметровая линейка.** Для измерения диаметра трубки используют **штангенциркуль** (рис. 29). С его помощью можно измерять расстояния с точностью до 0,1 мм. Для измерения расстояний на местности пользуются **рулеткой,** которая представляет собой ленту с нанесёнными на ней делениями (рис. 30).

Практические задания

24 Измерьте ширину и длину учебника геометрии и выразите их в сантиметрах и в миллиметрах.

25 Измерив толщину учебника геометрии без обложки, найдите толщину одного листа.

26 Найдите длины всех отрезков, изображённых на рисунке 31, если за единицу измерения принят отрезок: а) KL; б) AB.

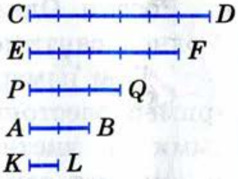


Рис. 31

27 Начертите отрезок AB и луч h. Пользуясь масштабной линейкой, отложите на луче h от его начала отрезки, длины которых равны $2AB$, $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{4}AB$.

28 Начертите прямую и отметьте на ней точки A и B. С помощью масштабной линейки отметьте точки C и D так, чтобы точка B была серединой отрезка AC, а точка D — серединой отрезка BC.

29 Начертите прямую AB. С помощью масштабной линейки отметьте на этой прямой точку C, такую, что $AC = 2$ см. Сколько таких точек можно отметить на прямой AB?

Задачи

30 Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC, если $AB = 7{,}8$ см, $BC = 25$ мм.

31 Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка BC, если:
а) $AB = 3{,}7$ см, $AC = 7{,}2$ см;
б) $AB = 4$ мм, $AC = 4$ см.

32 Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 12$ см, $BC = 13{,}5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

33 Точки B, D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 7$ см, $MD = 16$ см. Каким может быть расстояние BM?

34 Точка C — середина отрезка AB, равного 64 см. На луче CA отмечена точка D так, что $CD = 15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA.

35 Расстояние между Москвой и С.-Петербургом равно 650 км. Город Тверь находится между Москвой и С.-Петербургом в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Тверью и С.-Петербургом, считая, что все три города расположены на одной прямой.

36 Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см?

Решение

Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB, BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (отрезок AC) равен 5 см, а сумма двух других ($AB + BC$) равна 7 см. Поэтому точки A, B и C не лежат на одной прямой.

37 Точка C — середина отрезка AB, точка O — середина отрезка AC. Найдите:
а) AC, CB, AO и OB, если $AB = 2$ см;
б) AB, AC, AO и OB, если $CB = 3{,}2$ м.

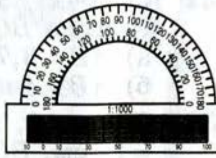
38 На прямой отмечены точки O, A и B так, что $OA = 12$ см, $OB = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB, если точка O:
а) лежит на отрезке AB;
б) не лежит на отрезке AB.

39 Отрезок, длина которого равна a, разделён произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

40 Отрезок, равный 28 см, разделён на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

§5 Измерение углов

9 Градусная мера угла



Транспортир

Рис. 32

Измерение углов аналогично измерению отрезков — оно основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают **градус** — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла. Эта единица измерения углов была введена много веков назад, ещё до нашей эры.

Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется **градусной мерой угла**. Для измерения углов используется транспортир (рис. 32).

На рисунке 33, *а* изображён угол AOB, градусная мера которого равна $150°$. Обычно говорят кратко: «Угол AOB равен $150°$» — и пишут: $\angle AOB = 150°$. На рисунке 33, *б* угол hk равен $40°$ ($\angle hk = 40°$). Определённые части градуса носят специальные названия: $\frac{1}{60}$ часть градуса называется **минутой**, $\frac{1}{60}$ часть минуты называется **секундой.** Минуты обозначают знаком «$'$», а секунды — знаком «$''$». Например, угол в 60 градусов, 32 минуты и 17 секунд обозначается так: $60°32'17''$.

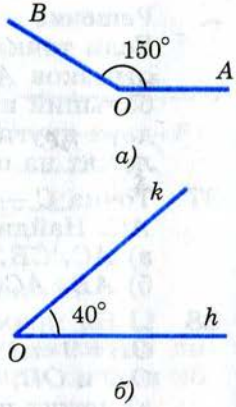


Рис. 33

Если два угла равны, то градус и его части укладываются в этих углах одинаковое число раз, т. е. **равные углы имеют равные градусные меры.**

Если же один угол меньше другого, то в нём градус (или его часть) укладывается меньшее число раз, чем в другом угле, т. е. **меньший угол имеет меньшую градусную меру.**

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развёрнутого угла, то он укладывается в развёрнутом угле ровно 180 раз, т. е. **развёрнутый угол равен 180°.**

Неразвёрнутый угол меньше развёрнутого угла, поэтому **неразвёрнутый угол меньше 180°.**

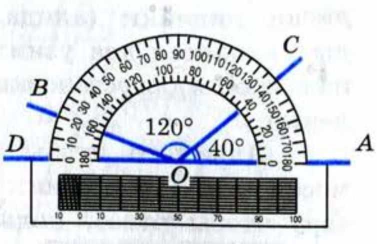


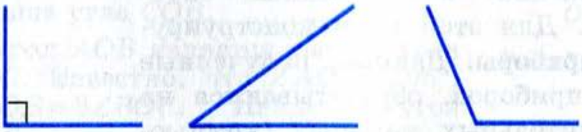
Рис. 34

На рисунке 34 изображены лучи с началом в точке O. Луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Мы видим, что $\angle AOC = 40°$, $\angle COB = 120°$, $\angle AOB = 160°$. Таким образом,

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB.$$

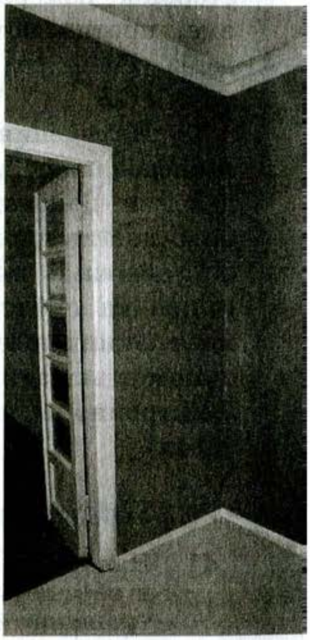
Ясно, что и во всех других случаях, **когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.**

Угол называется **прямым**, если он равен 90° (рис. 35, *а*), **острым**, если он меньше 90°, т. е. меньше прямого угла (рис. 35, *б*), **тупым**, если он больше 90°, но меньше 180°, т. е. больше прямого, но меньше развёрнутого угла (рис. 35, *в*).



Прямой угол *а)* *Острый угол* *б)* *Тупой угол* *в)*

Рис. 35



Прямые углы мы видим в окружающей нас обстановке: прямой угол образуют линии пересечения стен и потолка в комнате, два края стола прямоугольной формы и т. д.

10 Измерение углов на местности

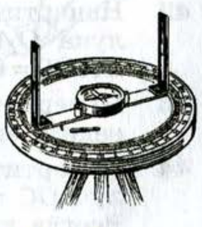


Рис. 36

Измерение углов на местности проводится с помощью специальных приборов. Простейшим из них является **астролябия** (рис. 36). Она состоит из двух частей: диска, разделённого на градусы, и вращающейся вокруг центра диска линейки (алидады). На концах алидады находятся два узких окошечка, которые используются для установки её в определённом направлении.

Для того чтобы измерить угол AOB на местности, треножник с астролябией ставят так, чтобы отвес, подвешенный к центру диска, находился точно над точкой O. Затем устанавливают алидаду вдоль одной из сторон OA или OB и отмечают деление, против которого находится указатель алидады. Далее поворачивают алидаду, направляя её вдоль другой стороны измеряемого угла, и отмечают деление, против которого окажется указатель алидады. Разность отсчёта и даёт градусную меру угла AOB.

Измерения углов проводятся в различных исследованиях, например в астрономии при определении положения небесных тел. Очень важно с достаточной точностью измерять углы при определении положения искусственных спутников на орбитах. Для этой цели конструируют специальные приборы. Данные, полученные с помощью этих приборов, обрабатываются на электронно-вычислительных машинах (компьютерах).

Практические задания

41 Начертите три неразвёрнутых угла и один развёрнутый угол и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle CDE$, $\angle hk$ и $\angle MNP$. С помощью транспортира измерьте углы и запишите результаты измерений.

42 Начертите луч OA и с помощью транспортира отложите от луча OA углы AOB, AOC и AOD так, чтобы $\angle AOB = 23°$, $\angle AOC = 67°$, $\angle AOD = 138°$.

43 Начертите угол, равный 70°, и с помощью транспортира проведите его биссектрису.

44 Начертите угол AOB и с помощью транспортира проведите луч OC так, чтобы луч OA являлся биссектрисой угла BOC. Всегда ли это выполнимо?

Задачи

45 Градусные меры двух углов равны. Равны ли сами углы?

46 На рисунке 37 изображены лучи с общим началом O.
а) Найдите градусные меры углов AOX, BOX, AOB, COB, DOX;
б) назовите углы, равные $20°$;
в) назовите равные углы;
г) назовите все углы со стороной OA и найдите их градусные меры.

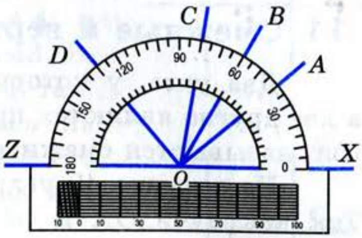


Рис. 37

47 Луч OE делит угол AOB на два угла. Найдите $\angle AOB$, если:
а) $\angle AOE = 44°$, $\angle EOB = 77°$;
б) $\angle AOE = 12°37'$, $\angle EOB = 108°25'$.

48 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB, если $\angle AOB = 78°$, а угол AOC на $18°$ меньше угла BOC.

49 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC, если $\angle AOB = 155°$, а угол AOC на $15°$ больше угла COB.

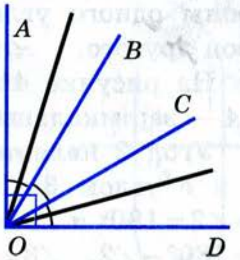


Рис. 38

50 Угол AOB является частью угла AOC. Известно, что $\angle AOC = 108°$, $\angle AOB = 3\angle BOC$. Найдите угол AOB.

51 На рисунке 38 угол AOD — прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOB и COD.

52 На рисунке 39 луч OV является биссектрисой угла ZOY, а луч OU — биссектрисой угла XOY. Найдите угол XOZ, если $\angle UOV = 80°$.

53 Луч l является биссектрисой неразвёрнутого угла hk. Может ли угол hl быть прямым или тупым?

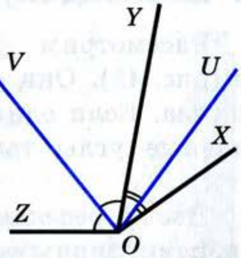


Рис. 39

§6 Перпендикулярные прямые

11 Смежные и вертикальные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными.**

На рисунке 40 углы AOB и BOC смежные. Так как лучи OA и OC образуют развёрнутый угол, то

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°.$$

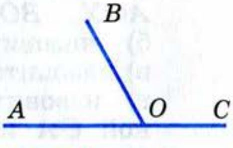


Рис. 40

Таким образом, **сумма смежных углов равна 180°.**

Два угла называются **вертикальными,** если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

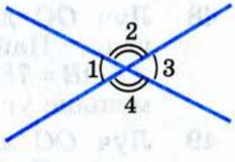


Рис. 41

На рисунке 41 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180°$. Отсюда получаем: $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$. Таким образом, градусные меры углов 1 и 3 равны. Отсюда следует, что и сами углы равны.

Итак, **вертикальные углы равны.**

12 Перпендикулярные прямые

Рассмотрим две пересекающиеся прямые (рис. 42). Они образуют четыре неразвёрнутых угла. Если один из них прямой (угол 1), то остальные углы также прямые (объясните почему).

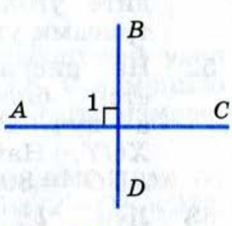


Рис. 42

Две пересекающиеся прямые называются **перпендикулярными** (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.

Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «Прямая AC перпендикулярна к прямой BD»).

Отметим, что **две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются** (рис. 43, *а*).

В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к прямой PQ (рис. 43, *б*). Мысленно перегнём рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1. Аналогично, луч QB наложится на луч QB_1.

Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то эта точка наложится на некоторую точку M_1, также лежащую на этих прямых (рис. 43, *в*), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1. Но это невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

Для проведения перпендикулярных прямых используют чертёжный угольник и линейку (рис. 44).

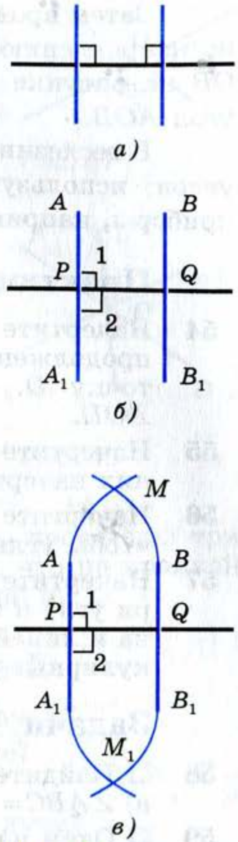


Рис. 43

13 Построение прямых углов на местности

Для построения прямых углов на местности применяют специальные приборы, простейшим из которых является **экер**.

Экер представляет собой два бруска, расположенных под прямым углом и укреплённых на треножнике (рис. 45). На концах брусков вбиты гвозди так, что прямые, проходящие через них, взаимно перпендикулярны.

Чтобы построить на местности прямой угол с заданной стороной OA, устанавливают треножник с экером так, чтобы отвес находился точно над точкой O, а направление одного бруска совпало с направлением луча OA. Совмещение этих направлений можно осуществить с помощью вехи, поставленной на луче.

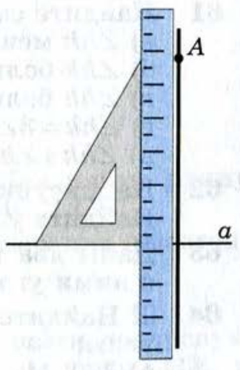


Рис. 44

Затем провешивают прямую линию по направлению другого бруска (прямая OB на рисунке 45). Получается прямой угол AOB.

В геодезии для построения прямых углов используют более совершенные приборы, например **теодолит**.

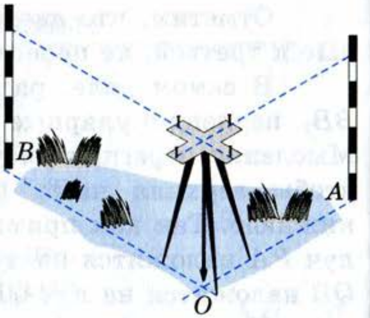


Рис. 45

Практические задания

54 Начертите острый угол AOB и на продолжении луча OB отметьте точку D. Сравните углы AOB и AOD.

55 Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них начертите смежный угол.

56 Начертите неразвёрнутый угол hk. Постройте угол h_1k_1 так, чтобы углы hk и h_1k_1 были вертикальными.

57 Начертите неразвёрнутый угол MON и отметьте точку P внутри угла и точку Q — вне его. С помощью чертёжного угольника и линейки через точки P и Q проведите прямые, перпендикулярные к прямым OM и ON.

Задачи

58 □ Найдите угол, смежный с углом ABC, если:
а) $\angle ABC = 111°$; б) $\angle ABC = 90°$; в) $\angle ABC = 15°$.

59 □ Один из смежных углов прямой. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?

60 □ Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?

61 Найдите смежные углы hk и kl, если:
а) $\angle hk$ меньше $\angle kl$ на $40°$;
б) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $120°$;
в) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47°18'$;
г) $\angle hk = 3\angle kl$;
д) $\angle hk : \angle kl = 5 : 4$.

62 На рисунке 46 углы BOD и COD равны. Найдите угол AOD, если $\angle COB = 148°$.

63 Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?

64 □ Найдите изображённые на рисунке 41 углы:
а) 1, 3, 4, если $\angle 2 = 117°$;
б) 1, 2, 4, если $\angle 3 = 43°27'$.

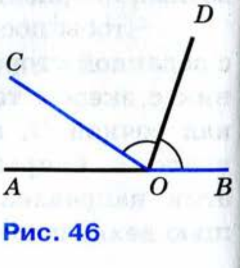


Рис. 46

65 Найдите неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если:
а) сумма двух из них равна 114°;
б) сумма трёх углов равна 220°.

66 На рисунке 41 найдите углы 1, 2, 3, 4, если:
а) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$;
б) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$;
в) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$.

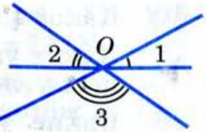


Рис. 47

67 На рисунке 47 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

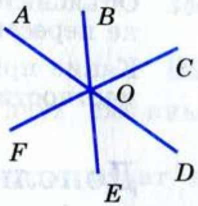


Рис. 48

68 На рисунке 48 $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы AOC, BOD, COE и COD.

69 Прямая a пересекает стороны угла A в точках P и Q. Могут ли обе прямые AP и AQ быть перпендикулярными к прямой a?

70 Через точку A, не лежащую на прямой a, проведены три прямые, пересекающие прямую a. Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a.

Вопросы для повторения к главе I

1 Сколько прямых можно провести через две точки?
2 Сколько общих точек могут иметь две прямые?
3 Объясните, что такое отрезок.
4 Объясните, что такое луч. Как обозначаются лучи?
5 Какая фигура называется углом? Объясните, что такое вершина и стороны угла.
6 Какой угол называется развёрнутым?
7 Какие фигуры называются равными?
8 Объясните, как сравнить два отрезка.
9 Какая точка называется серединой отрезка?
10 Объясните, как сравнить два угла.
11 Какой луч называется биссектрисой угла?
12 Точка C делит отрезок AB на два отрезка. Как найти длину отрезка AB, если известны длины отрезков AC и CB?
13 Какими инструментами пользуются для измерения расстояний?
14 Что такое градусная мера угла?
15 Луч OC делит угол AOB на два угла. Как найти градусную меру угла AOB, если известны градусные меры углов AOC и COB?

16 Какой угол называется острым? прямым? тупым?

17 Какие углы называются смежными? Чему равна сумма смежных углов?

18 Какие углы называются вертикальными? Каким свойством обладают вертикальные углы?

19 Какие прямые называются перпендикулярными?

20 Объясните, почему две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются.

21 Какие приборы применяют для построения прямых углов на местности?

Дополнительные задачи

71 Отметьте четыре точки так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой. Через каждую пару точек проведите прямую. Сколько получилось прямых?

72 Даны четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения имеют эти прямые, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые?

73 Сколько неразвёрнутых углов образуется при пересечении трёх прямых, проходящих через одну точку?

74 Точка N лежит на отрезке MP. Расстояние между точками M и P равно 24 см, а расстояние между точками N и M в два раза больше расстояния между точками N и P. Найдите расстояние:
а) между точками N и P;
б) между точками N и M.

75 Три точки K, L, M лежат на одной прямой, $KL = 6$ см, $LM = 10$ см. Каким может быть расстояние KM? Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.

76 Отрезок AB длины a разделён точками P и Q на три отрезка AP, PQ и QB так, что $AP = 2PQ = 2QB$. Найдите расстояние между:
а) точкой A и серединой отрезка QB;
б) серединами отрезков AP и QB.

77 Отрезок длины m разделён:
а) на три равные части;
б) на пять равных частей.
Найдите расстояние между серединами крайних частей.

78 Отрезок в 36 см разделён на четыре не равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно 30 см. Найдите расстояние между серединами средних частей.

79* Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC = 2MN$.

80 Известно, что $\angle AOB = 35°$, $\angle BOC = 50°$. Найдите угол AOC. Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж с помощью линейки и транспортира.

81 Угол hk равен $120°$, а угол hm равен $150°$. Найдите угол km. Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.

82 Найдите смежные углы, если:
а) один из них на $45°$ больше другого;
б) их разность равна $35°$.

83 Найдите угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.

84 Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

85* Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

86 Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают.

Глава II

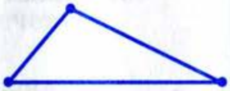
Треугольники

В этой главе вы начнёте изучение свойств треугольников и окружностей. Треугольник — одна из самых простых и вместе с тем самых важных фигур в геометрии. То же самое можно сказать об окружности. Оказывается, что эти простые фигуры таят в себе много интересного и неожиданного. Различные их свойства вы будете изучать на протяжении всего курса геометрии. При этом мы будем формулировать и доказывать теоремы. Что такое теорема и что значит доказать теорему, вы узнаете в данной главе, где появятся первые теоремы о треугольниках.

§1 Первый признак равенства треугольников

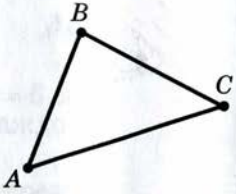
14 Треугольник

Отметим какие-нибудь три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками (рис. 49, *а*). Получим геометрическую фигуру, которая называется **треугольником.** Отмеченные три точки называются **вершинами,** а отрезки — **сторонами** треугольника. На рисунке 49, *б* изображён треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA. Такой треугольник будем обозначать так: $\triangle ABC$ (читается: «треугольник ABC»). Этот же треугольник можно обозначить иначе, записав буквы A, B, C в другом порядке: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т. д.



Треугольник

а)



Треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA

б)

Рис. 49

Три угла — $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ — называются **углами треугольника** ABC. Часто их обозначают одной буквой: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Сумма длин трёх сторон треугольника называется его **периметром.**

Напомним, что две фигуры, в частности два треугольника, называются равными, если их можно совместить наложением. На рисунке 50 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, т. е. попарно совместятся их вершины и стороны. Ясно, что при этом совместятся попарно и углы этих треугольников.

Таким образом, **если два треугольника равны, то элементы (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.**

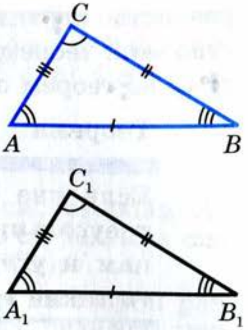


Рис. 50

Отметим, что **в равных треугольниках против соответственно равных сторон** (т. е. совмещающихся при наложении) **лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов лежат равные стороны.** Так, например, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, изображённых на рисунке 50, против соответственно равных сторон AB и A_1B_1 лежат равные углы C и C_1.

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, не накладывая один треугольник на другой, а сравнивая только некоторые их элементы. Как это сделать, мы обсудим в следующих пунктах.

Такая возможность — установить равенство двух фигур, не производя наложения одной на другую, а измеряя и сравнивая лишь некоторые элементы этих фигур, важна для практики, например для сравнения двух земельных участков, которые, конечно, нельзя наложить друг на друга.

15 Первый признак равенства треугольников

В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путём рассуждений, называется **теоремой**, а сами рассуждения называются **доказательством теоремы.** Фактически мы уже имели дело с теоремами и их доказательствами. Так, утверждение о равенстве вертикальных углов является теоремой, а рассуждения, которые мы провели, чтобы установить равенство вертикальных углов, и есть доказательство этой теоремы. В этом параграфе мы докажем одну из теорем о равенстве треугольников.

Теорема

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, углы A и A_1 равны (рис. 51). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. **Теорема доказана.**

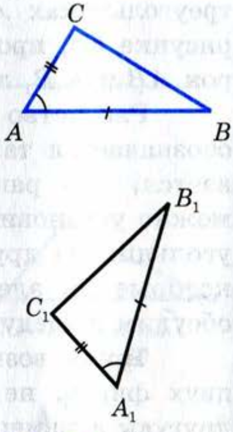


Рис. 51

Доказанная теорема выражает **признак** (равенство у треугольников двух сторон и угла между ними), по которому можно сделать вывод о равенстве треугольников. Он называется **первым признаком равенства треугольников.**

Практические задания

87 Начертите треугольник и обозначьте его вершины буквами M, N и P. а) Назовите все углы и стороны треугольника; б) с помощью масштабной линейки измерьте стороны и найдите периметр треугольника.

88 Начертите треугольник DEF так, чтобы угол E был прямым. Назовите: а) стороны, лежащие против углов D, E, F; б) углы, лежащие против сторон DE, EF, FD; в) углы, прилежащие к сторонам DE, EF, FD.

89 С помощью транспортира и масштабной линейки начертите треугольник ABC, в котором: а) $AB = 4{,}3$ см, $AC = 2{,}3$ см, $\angle A = 23°$; б) $BC = 9$ см, $BA = 6{,}2$ см, $\angle B = 122°$; в) $CA = 3$ см, $CB = 4$ см, $\angle C = 90°$.

Задачи

90 Сторона AB треугольника ABC равна 17 см, сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

91 Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.

92 Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

93 Отрезки AE и DC пересекаются в точке B, являющейся серединой каждого из них. а) Докажите, что треугольники ABC и EBD равны; б) найдите углы A и C треугольника ABC, если в треугольнике BDE $\angle D = 47°$, $\angle E = 42°$.

94 На рисунке 52 $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABD и ACD равны; б) найдите BD и AB, если $AC = 15$ см, $DC = 5$ см.

95 На рисунке 53 $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABC и CDA равны; б) найдите AB и BC, если $AD = 17$ см, $DC = 14$ см.

96 На рисунке 54 $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74°$, $\angle 2 = 36°$. а) Докажите, что треугольники AOB и DOC равны; б) найдите $\angle ACD$.

97 Отрезки AC и BD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

98 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$.

99 На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC, а точка E — на отрезке AD, причём $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

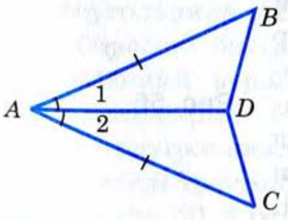


Рис. 52

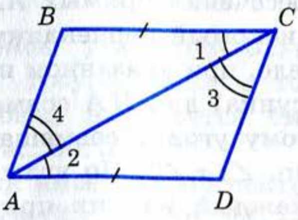


Рис. 53

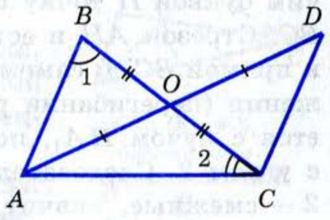
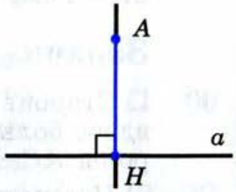


Рис. 54

§2 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

16 Перпендикуляр к прямой



Отрезок AH – перпендикуляр к прямой a

Рис. 55

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на этой прямой (рис. 55). Соединим точку A отрезком с точкой H прямой a. Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведённым из точки A к прямой a**, если прямые AH и a перпендикулярны. Точка H называется **основанием перпендикуляра.**

Теорема

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Доказательство

Пусть A — точка, не лежащая на прямой BC (рис. 56, *а*). Докажем сначала, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой BC.

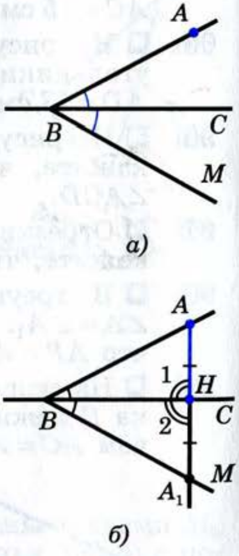


Рис. 56

Отложим от луча BC угол MBC, равный углу ABC, как показано на рисунке 56, *а*. Так как углы ABC и MBC равны, то первый из них можно наложить на второй так, что стороны BA и BC первого угла совместятся со сторонами BM и BC второго угла. Наглядно это наложение можно представить себе как перегибание рисунка по прямой BC. При этом точка A наложится на некоторую точку A_1 луча BM (рис. 56, *б*). Обозначим буквой H точку пересечения прямых AA_1 и BC. Отрезок AH и есть искомый перпендикуляр к прямой BC. В самом деле, при указанном наложении (перегибании рисунка) луч HA совмещается с лучом HA_1, поэтому угол 1 совмещается с углом 2. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Но углы 1 и 2 — смежные, значит, каждый из них прямой. Итак, $AH \perp BC$.

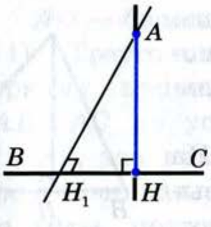


Рис. 57

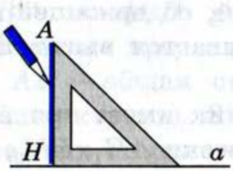
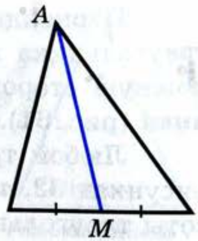
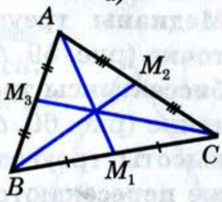


Рис. 58



AM – медиана треугольника

а)



AM_1, BM_2, CM_3 – медианы треугольника ABC

б)

Рис. 59

Докажем теперь, что из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC.

Если предположить, что через точку A можно провести ещё один перпендикуляр AH_1 к прямой BC, то получим, что две прямые AH и AH_1, перпендикулярные к прямой BC, пересекаются (рис. 57). Но в п. 12 было доказано, что это невозможно. Итак, из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC. **Теорема доказана.**

Для проведения на чертеже перпендикуляра из точки к прямой используют чертёжный угольник (рис. 58).

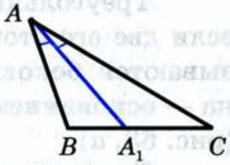
17 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой треугольника** (рис. 59, *а*).

Любой треугольник имеет три медианы. На рисунке 59, *б* отрезки AM_1, BM_2, CM_3 — медианы треугольника ABC.

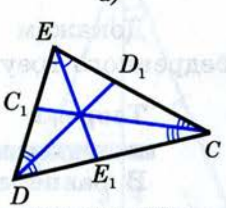
Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника** (рис. 60, *а*).

Любой треугольник имеет три биссектрисы. На рисунке 60, *б* отрезки CC_1, DD_1 и EE_1 — биссектрисы треугольника CDE.



AA_1 – биссектриса треугольника ABC

а)

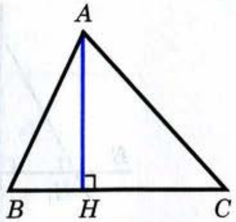


CC_1, DD_1, EE_1 – биссектрисы треугольника CDE

б)

Рис. 60

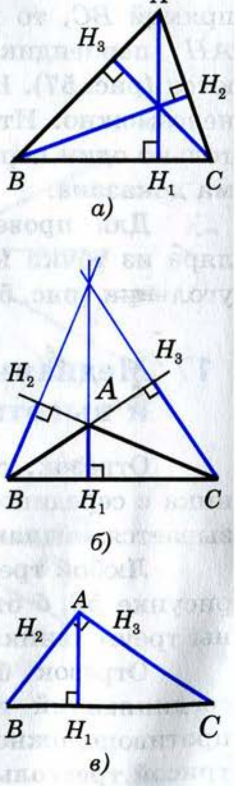
Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой треугольника** (рис. 61).



AH – высота треугольника ABC

Рис. 61

Любой треугольник имеет три высоты. На рисунках 62, *а*, *б*, *в* отрезки AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC.



AH_1, BH_2, CH_3– высоты $\triangle ABC$

Рис. 62

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника обладают замечательными свойствами:

Медианы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 59, *б*);
биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 60, *б*);
высоты треугольника или их продолжения также пересекаются в одной точке (рис. 62, *а*, *б*, *в*).

Эти утверждения мы докажем в 8 классе.

18 Свойства равнобедренного треугольника

Треугольник называется **равнобедренным,** если две его стороны равны. Равные стороны называются **боковыми сторонами,** а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника (рис. 63, *а*).

Треугольник, все стороны которого равны, называется **равносторонним** (рис. 63, *б*).

Докажем две теоремы о свойствах равнобедренного треугольника.

Теорема

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

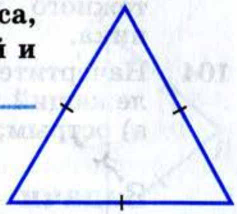
Доказательство

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и докажем, что $\angle B = \angle C$.

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 64). Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, так как AD — биссектриса). В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, поэтому $\angle B = \angle C$. **Теорема доказана.**

Равнобедренный треугольник

а)



Равносторонний треугольник

б)

Рис. 63

Теорема

В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Доказательство

Обратимся снова к рисунку 64, на котором $\triangle ABC$ — равнобедренный треугольник с основанием BC, AD — его биссектриса.

Из равенства треугольников ABD и ACD следует, что $BD = DC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Равенство $BD = DC$ означает, что точка D — середина стороны BC, и поэтому AD — медиана треугольника ABC. Так как углы 3 и 4 — смежные и равны друг другу, то они прямые. Следовательно, отрезок AD является также высотой треугольника ABC. **Теорема доказана.**

Мы установили, что биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведённые к основанию, совпадают. Поэтому справедливы также утверждения:

1. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.

2. Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.

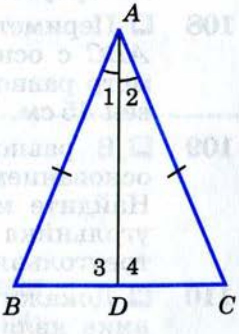


Рис. 64

Практические задания

100 Начертите прямую a и отметьте точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой a. С помощью чертёжного угольника проведите из этих точек перпендикуляры к прямой a.

101 Начертите треугольник. С помощью масштабной линейки отметьте середины сторон и проведите медианы треугольника.

102 Начертите треугольник. С помощью транспортира и линейки проведите его биссектрисы.

103 Начертите треугольник ABC с тремя острыми углами и треугольник MNP, у которого угол M тупой. С помощью чертёжного угольника проведите высоты каждого треугольника.

104 Начертите три равнобедренных треугольника так, чтобы угол, лежащий против основания, был:
а) острым; б) прямым; в) тупым.

Задачи

105 Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны.
а) Докажите, что $\angle ABD = \angle CDB$;
б) найдите $\angle ABC$, если $\angle ADB = 44°$.

106 Медиана AD треугольника ABC продолжена за точку D на отрезок DE, равный AD, и точка E соединена с точкой C.
а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$;
б) найдите $\angle ACE$, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

107 В равнобедренном треугольнике основание в два раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите стороны треугольника.

108 Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника BCD равен 45 см. Найдите стороны AB и BC.

109 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AM. Найдите медиану AM, если периметр треугольника ABC равен 32 см, а периметр треугольника ABM равен 24 см.

110 Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

111 На рисунке 65 $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

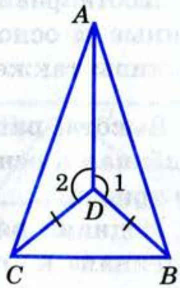


Рис. 65

112 На рисунке 66 $AB = BC$, $\angle 1 = 130°$. Найдите $\angle 2$.

113 Точки M и P лежат по одну сторону от прямой b. Перпендикуляры MN и PQ, проведённые к прямой b, равны. Точка O — середина отрезка NQ.
а) Докажите, что $\angle OMP = \angle OPM$;
б) найдите $\angle NOM$, если $\angle MOP = 105°$.

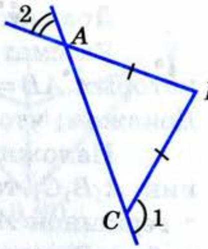


Рис. 66

114 Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к равным сторонам, равны.

115 Медиана AM треугольника ABC равна отрезку BM. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других углов.

116 Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

117 На рисунке 67 $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle BAC = \angle CED$.

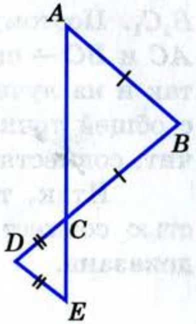


Рис. 67

118 На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что:
а) $\triangle BAM = \triangle CAN$;
б) треугольник AMN равнобедренный.

119 В равнобедренном треугольнике DEK с основанием $DK = 16$ см отрезок EF — биссектриса, $\angle DEF = 43°$. Найдите KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.

120 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. На сторонах AB и CB отмечены соответственно точки E и F так, что $AE = CF$. Докажите, что: а) $\triangle BDE = \triangle BDF$; б) $\triangle ADE = \triangle CDF$.

§3 Второй и третий признаки равенства треугольников

19 Второй признак равенства треугольников

Теорема

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 68). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB — с равной ей стороной A_1B_1, и вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1.

Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1, а сторона BC — на луч B_1C_1. Поэтому вершина C — общая точка сторон AC и BC — окажется лежащей как на луче A_1C_1, так и на луче B_1C_1 и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей — вершиной C_1. Значит, совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, поэтому они равны. **Теорема доказана.**

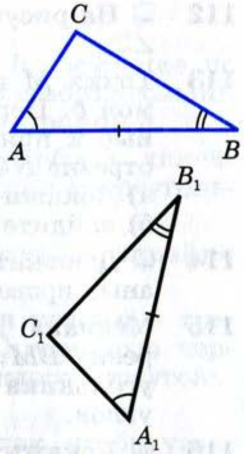


Рис. 68

20 Третий признак равенства треугольников

Теорема

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (рис. 69). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B — с вершиной B_1, а вершины C и C_1 оказались по разные стороны от прямой A_1B_1 (рис. 70).

Возможны три случая: луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 70, *а*); луч C_1C совпада-

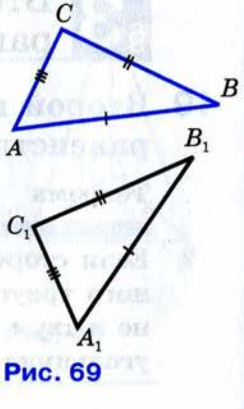
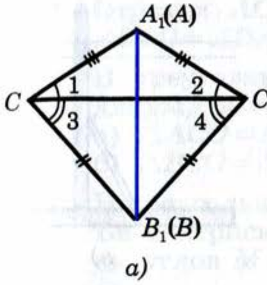
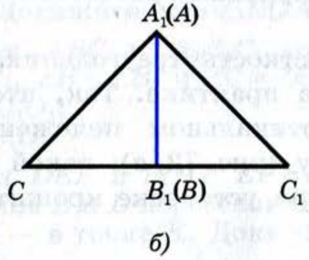


Рис. 69





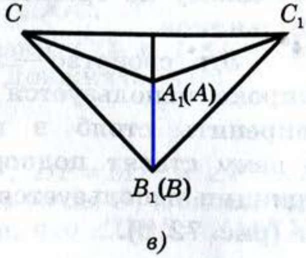


Рис. 70

ет с одной из сторон этого угла (рис. 70, *б*); луч C_1C проходит вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 70, *в*). Рассмотрим первый случай (остальные случаи рассмотрите самостоятельно).

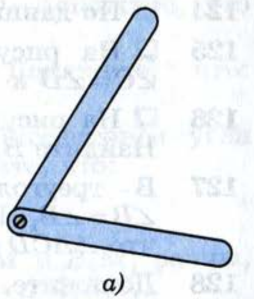
Так как по условию теоремы стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 равны, то треугольники A_1C_1C и B_1C_1C — равнобедренные (см. рис. 70, *а*). По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$. Итак, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. **Теорема доказана.**

Из третьего признака равенства треугольников следует, что **треугольник — жёсткая фигура**. Поясним, что это означает.

Представим себе две рейки, у которых два конца скреплены гвоздём (рис. 71, *а*). Такая конструкция не является жёсткой: сдвигая или раздвигая свободные концы реек, мы можем менять угол между ними. Теперь возьмём ещё одну рейку и скрепим её концы со свободными концами первых двух реек (рис. 71, *б*).

Полученная конструкция — треугольник — будет уже жёсткой. В ней нельзя сдвинуть или раздвинуть никакие две стороны, т. е. нельзя изменить ни один угол. Действительно, если бы это удалось, то мы получили бы новый треугольник, не равный исходному. Но это невозможно, так как новый треугольник должен быть равен



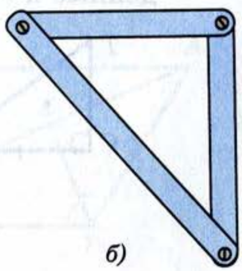
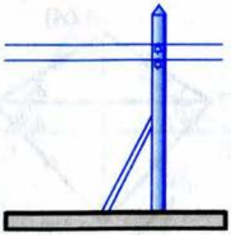


Рис. 71

исходному по третьему признаку равенства треугольников.

Это свойство — жёсткость треугольника — широко используется на практике. Так, чтобы закрепить столб в вертикальном положении, к нему ставят подпорку (рис. 72, *а*); такой же принцип используется при установке кронштейна (рис. 72, *б*).


а)


б)

Рис. 72

Задачи

121 Отрезки AB и CD пересекаются в середине O отрезка AB, $\angle OAD = \angle OBC$.
а) Докажите, что $\triangle CBO = \triangle DAO$;
б) найдите BC и CO, если $CD = 26$ см, $AD = 15$ см.

122 На рисунке 53 (см. с. 31) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
а) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$;
б) найдите AB и BC, если $AD = 19$ см, $CD = 11$ см.

123 На биссектрисе угла A взята точка D, а на сторонах этого угла — точки B и C такие, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

124 По данным рисунка 73 докажите, что $OP = OT$, $\angle P = \angle T$.

125 На рисунке 74 $\angle DAC = \angle DBC$, $AO = BO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

126 На рисунке 74 $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $AC = 13$ см. Найдите BD.

127 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

128 Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведённые к соответственно равным сторонам, равны.

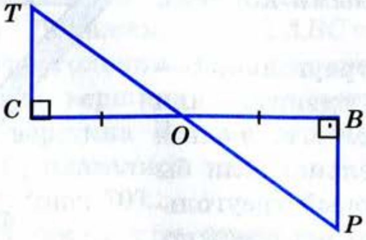


Рис. 73

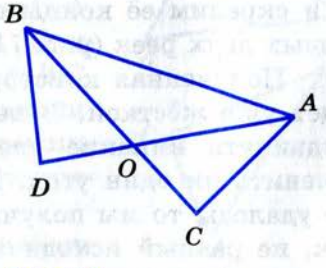


Рис. 74

129 Отрезки AC и BD пересекаются в середине O отрезка AC, $\angle BCO = \angle DAO$. Докажите, что $\triangle BOA = \triangle DOC$.

130 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки CO и C_1O_1 — медианы, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Докажите, что:
а) $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$;
б) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$.

131 В треугольниках DEF и MNP $EF = NP$, $DF = MP$ и $\angle F = \angle P$. Биссектрисы углов E и D пересекаются в точке O, а биссектрисы углов M и N — в точке K. Докажите, что $\angle DOE = \angle MKN$.

132 Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN — равнобедренный.

133 Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник — равнобедренный.

134 Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.

135 Докажите, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то треугольники равны.

136 На рисунке 52 (см. с. 31) $AB = AC$, $BD = DC$ и $\angle BAC = 50°$. Найдите $\angle CAD$.

137 На рисунке 53 (см. с. 31) $BC = AD$, $AB = CD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

138 На рисунке 75 $AB = CD$ и $BD = AC$. Докажите, что: а) $\angle CAD = \angle ADB$; б) $\angle BAC = \angle CDB$.

139 На рисунке 76 $AB = CD$, $AD = BC$, BE — биссектриса угла ABC, а DF — биссектриса угла ADC. Докажите, что:
а) $\angle ABE = \angle ADF$;
б) $\triangle ABE = \triangle CDF$.

140 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы BM и B_1M_1 равны, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

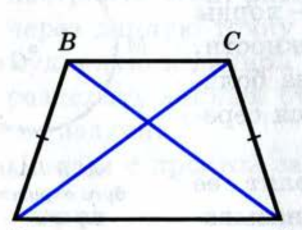


Рис. 75

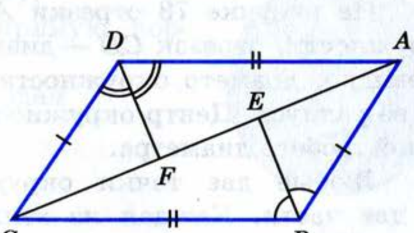


Рис. 76

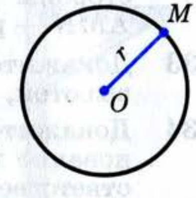
141 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ и $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

142 Равнобедренные треугольники ADC и BCD имеют общее основание DC. Прямая AB пересекает отрезок CD в точке O. Докажите, что: а) $\angle ADB = \angle ACB$; б) $DO = OC$.

§4 Задачи на построение

21 Окружность

Предложение, в котором разъясняется смысл того или иного выражения или названия, называется **определением.** Мы уже встречались с определениями, например с определением угла, смежных углов, равнобедренного треугольника и т. д. Дадим определение ещё одной геометрической фигуры — окружности.

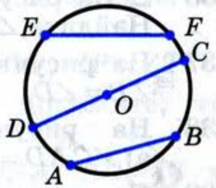


Окружность радиуса r с центром O

Рис. 77

Определение

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.



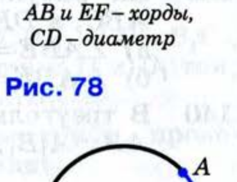
AB и EF – хорды, CD – диаметр

Рис. 78

Данная точка называется **центром** окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, — **радиусом** окружности (рис. 77). Из определения окружности следует, что все радиусы имеют одну и ту же длину.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется её **хордой.** Хорда, проходящая через центр окружности, называется её **диаметром.**

На рисунке 78 отрезки AB и EF — хорды окружности, отрезок CD — диаметр окружности. Очевидно, диаметр окружности в два раза больше её радиуса. Центр окружности является серединой любого диаметра.



ALB и AMB – дуги окружности, ограниченные точками A и B

Рис. 79

Любые две точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется **дугой** окружности. На рисунке 79 ALB и AMB — дуги, ограниченные точками A и B.

Для изображения окружности на чертеже пользуются **циркулем** (рис. 80). Чтобы провести окружность на местности, можно воспользоваться верёвкой (рис. 81).

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом** (рис. 82).

Построение окружности с помощью циркуля

Рис. 80

22 Построения циркулем и линейкой

Мы уже имели дело с геометрическими построениями: проводили прямые, откладывали отрезки, равные данным, чертили углы, треугольники и другие фигуры. При этом мы пользовались масштабной линейкой, циркулем, транспортиром, чертёжным угольником.

Оказывается, что многие построения можно выполнить с помощью только циркуля и линейки без масштабных делений. Поэтому в геометрии специально выделяют те задачи на построение, которые решаются с помощью только этих двух инструментов.

Построение окружности с помощью верёвки

Рис. 81

Что можно делать с их помощью? Ясно, что **линейка позволяет провести произвольную прямую, а также построить прямую, проходящую через две данные точки. С помощью циркуля можно провести окружность произвольного радиуса, а также окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.** Выполняя эти несложные операции, мы сможем решить много интересных задач на построение:

построить угол, равный данному;

через данную точку провести прямую, перпендикулярную к данной прямой;

разделить данный отрезок пополам

и другие задачи.

Начнём с простой задачи.

Круг

Рис. 82

Задача

На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.

Решение

Изобразим фигуры, данные в условии задачи: луч OC и отрезок AB (рис. 83, *а*). Затем циркулем построим окружность радиуса AB с центром O (рис. 83, *б*). Эта окружность пересечёт луч OC в некоторой точке D. Отрезок OD — искомый.

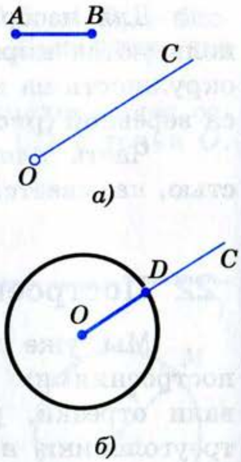


Рис. 83

23 Примеры задач на построение

Построение угла, равного данному

Задача

Отложить от данного луча угол, равный данному.

Решение

Данный угол с вершиной A и луч OM изображены на рисунке 84. Требуется построить угол, равный углу A, так, чтобы одна из его сторон совпала с лучом OM.

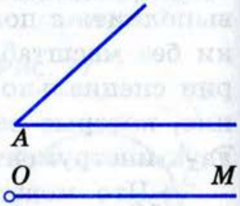


Рис. 84

Проведём окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла. Эта окружность пересекает стороны угла в точках B и C (рис. 85, *а*). Затем проведём окружность того же радиуса с центром в начале данного луча OM. Она пересекает луч в точке D (рис. 85, *б*). После этого построим окружность с центром D, радиус которой равен BC. Окружности с центрами O и D пересекаются в двух точках. Одну из этих точек обозначим буквой E. Докажем, что угол MOE — искомый.

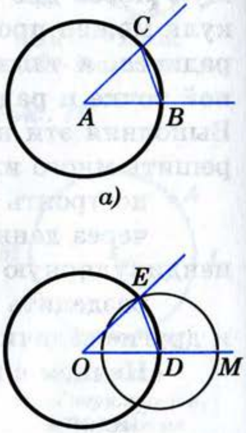


Рис. 85

Рассмотрим треугольники ABC и ODE. Отрезки AB и AC являются радиусами окружности с центром A, а отрезки OD и OE — радиусами окружности с центром O (см. рис. 85, *б*). Так как по построению эти окружности имеют равные радиусы, то $AB = OD$, $AC = OE$. Также по построению $BC = DE$.

Следовательно, $\triangle ABC = \triangle ODE$ по трём сторонам. Поэтому $\angle DOE = \angle BAC$, т. е. построенный угол MOE равен данному углу A.

То же построение можно выполнить и на местности, если вместо циркуля воспользоваться верёвкой.

Построение биссектрисы угла

Задача

Построить биссектрису данного угла.

Решение

Данный угол BAC изображён на рисунке 86. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в вершине A. Она пересечёт стороны угла в точках B и C.

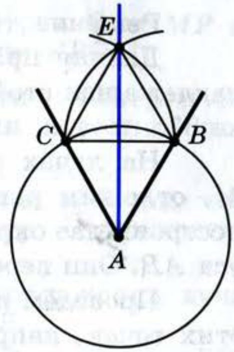


Рис. 86

Затем проведём две окружности одинакового радиуса BC с центрами в точках B и C (на рисунке изображены лишь части этих окружностей). Они пересекутся в двух точках, из которых хотя бы одна лежит внутри угла. Обозначим её буквой E. Докажем, что луч AE является биссектрисой данного угла BAC.

Рассмотрим треугольники ACE и ABE. Они равны по трём сторонам. В самом деле, AE — общая сторона; AC и AB равны как радиусы одной и той же окружности; $CE = BE$ по построению.

Из равенства треугольников ACE и ABE следует, что $\angle CAE = \angle BAE$, т. е. луч AE — биссектриса данного угла BAC.

Замечание

Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на два равных угла? Ясно, что можно, — для этого нужно провести биссектрису этого угла.

Данный угол можно разделить также на четыре равных угла. Для этого нужно разделить его пополам, а затем каждую половину разделить ещё раз пополам.

А можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на три равных угла? Эта задача, получившая название **задачи о трисекции угла**, в течение многих веков привлекала внимание математиков. Лишь в XIX веке было доказано, что для произвольного угла такое построение невозможно.

Построение перпендикулярных прямых

Задача

Даны прямая и точка на ней. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.

Решение

Данная прямая a и данная точка M, принадлежащая этой прямой, изображены на рисунке 87.

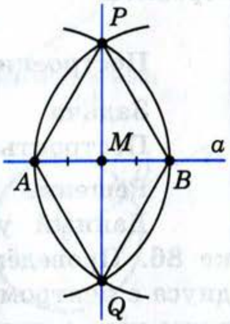


Рис. 87

На лучах прямой a, исходящих из точки M, отложим равные отрезки MA и MB. Затем построим две окружности с центрами A и B радиуса AB. Они пересекаются в двух точках: P и Q.

Проведём прямую через точку M и одну из этих точек, например прямую MP (см. рис. 87), и докажем, что эта прямая — искомая, т. е. что она перпендикулярна к данной прямой a.

В самом деле, так как медиана PM равнобедренного треугольника PAB является также высотой, то $PM \perp a$.

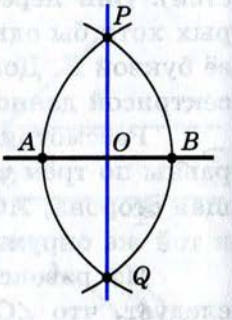


Рис. 88

Построение середины отрезка

Задача

Построить середину данного отрезка.

Решение

Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами A и B радиуса AB (рис. 88). Они пересекаются в точках P и Q. Проведём прямую PQ. Точка O пересечения этой прямой с отрезком AB и есть искомая середина отрезка AB.

В самом деле, треугольники APQ и BPQ равны по трём сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 89).

Следовательно, отрезок PO — биссектриса равнобедренного треугольника APB, а значит, и медиана, т. е. точка O — середина отрезка AB.

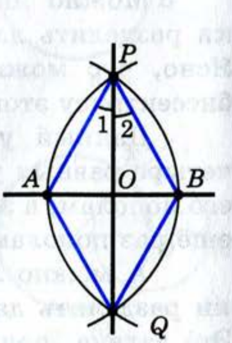


Рис. 89

Задачи

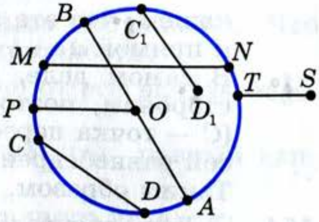


Рис. 90

143 ☐ Какие из отрезков, изображённых на рисунке 90, являются: а) хордами окружности; б) диаметрами окружности; в) радиусами окружности?

144 Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что: а) хорды BD и AC равны; б) хорды AD и BC равны; в) $\angle BAD = \angle BCD$.

145 ☐ Отрезок MK — диаметр окружности с центром O, а MP и PK — равные хорды этой окружности. Найдите $\angle POM$.

146 ☐ Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

147 На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что угол AOB — прямой. Отрезок BC — диаметр окружности. Докажите, что хорды AB и AC равны.

148 ☐ На прямой даны две точки A и B. На продолжении луча BA отложите отрезок BC так, чтобы $BC = 2AB$.

149 ☐ Даны прямая a, точка B, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на прямой a так, чтобы $BM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

150 ☐ Даны окружность, точка A, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на окружности так, чтобы $AM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

151 ☐ Даны острый угол BAC и луч XY. Постройте угол YXZ так, чтобы $\angle YXZ = 2\angle BAC$.

152 Дан тупой угол AOB. Постройте луч OX так, чтобы углы XOA и XOB были равными тупыми углами.

153 ☐ Даны прямая a и точка M, не лежащая на ней. Постройте прямую, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a.

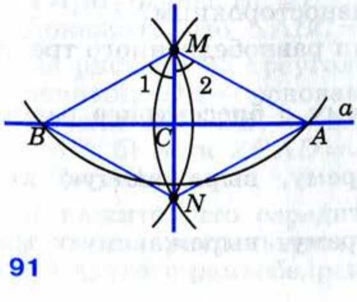


Рис. 91

Решение

Построим окружность с центром в данной точке M, пересекающую данную прямую a в двух точках, которые обозначим буквами A и B (рис. 91). Затем построим две окружности с центрами A и B, проходящие через точку M. Эти окружности пересекаются в точке M и ещё в одной точке, которую обозначим буквой N. Проведём прямую MN и докажем, что эта прямая — искомая, т. е. она перпендикулярна к прямой a.

В самом деле, треугольники AMN и BMN равны по трём сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что отрезок MC (C — точка пересечения прямых a и MN) является биссектрисой равнобедренного треугольника AMB, а значит, и высотой. Таким образом, $MN \perp AB$, т. е. $MN \perp a$.

154 □ Дан треугольник ABC. Постройте: а) биссектрису AK; б) медиану BM; в) высоту CH треугольника.

155 □ С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 45°; б) 22°30′.

Вопросы для повторения к главе II

1 Объясните, какая фигура называется треугольником. Начертите треугольник и покажите его стороны, вершины и углы. Что такое периметр треугольника?

2 Какие треугольники называются равными?

3 Что такое теорема и доказательство теоремы?

4 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак равенства треугольников.

5 Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной прямой.

6 Сформулируйте и докажите теорему о перпендикуляре, проведённом из данной точки к данной прямой.

7 Какой отрезок называется медианой треугольника? Сколько медиан имеет треугольник?

8 Какой отрезок называется биссектрисой треугольника? Сколько биссектрис имеет треугольник?

9 Какой отрезок называется высотой треугольника? Сколько высот имеет треугольник?

10 Какой треугольник называется равнобедренным? Как называются его стороны?

11 Какой треугольник называется равносторонним?

12 Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.

13 Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе равнобедренного треугольника.

14 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак равенства треугольников.

15 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак равенства треугольников.

16 Что такое определение? Дайте определение окружности. Что такое центр, радиус, хорда и диаметр окружности?

17 Объясните, как отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному.

18 Объясните, как отложить от данного луча угол, равный данному.

19 Объясните, как построить биссектрису данного угла.

20 Объясните, как построить прямую, проходящую через данную точку, лежащую на данной прямой, и перпендикулярную к этой прямой.

21 Объясните, как построить середину данного отрезка.

Дополнительные задачи

156 ☐ Периметр треугольника ABC равен 15 см. Сторона BC больше стороны AB на 2 см, а сторона AB меньше стороны AC на 1 см. Найдите стороны треугольника.

157 ☐ В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 2 см, но меньше суммы боковых сторон на 3 см. Найдите стороны треугольника.

158 Основание равнобедренного треугольника равно 8 см. Медиана, проведённая к боковой стороне, разбивает треугольник на два треугольника так, что периметр одного треугольника на 2 см больше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника.

159 Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и угол, противолежащий основанию, одного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу, противолежащему основанию, другого треугольника.

160 Прямая a проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к нему. Докажите, что: а) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B; б) каждая точка, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

161 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы AM и A_1M_1 равны, $BC = B_1C_1$ и $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

162 На рисунке 92 треугольник ADE равнобедренный, DE — основание. Докажите, что: а) если $BD = CE$, то $\angle CAD = \angle BAE$ и $AB = AC$; б) если $\angle CAD = \angle BAE$, то $BD = CE$ и $AB = AC$.

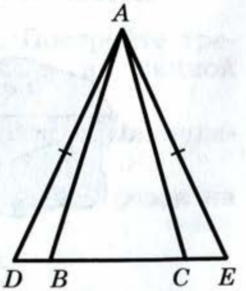


Рис. 92

163 Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

164 На сторонах равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF, как показано на рисунке 93. Точки D, E, F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

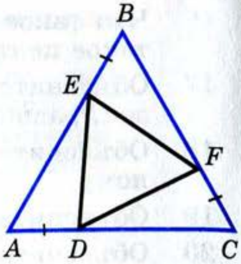


Рис. 93

165 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. На отрезках AC и BD отмечены точки K и K_1 так, что $AK=BK_1$. Докажите, что: а) $OK=OK_1$; б) точка O лежит на прямой KK_1.

166 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. Точки M и N — середины отрезков AC и BD. Докажите, что точка O — середина отрезка MN.

167 Стороны равностороннего треугольника ABC продолжены, как показано на рисунке 94, на равные отрезки AD, CE, BF. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

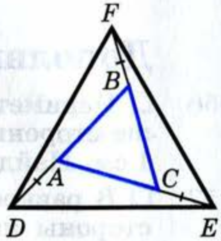


Рис. 94

168 В треугольнике ABC $\angle A=38°$, $\angle B=110°$, $\angle C=32°$. На стороне AC отмечены точки D и E так, что точка D лежит на отрезке AE, $BD=DA$, $BE=EC$. Найдите угол DBE.

169 На рисунке 95 $OC=OD$, $OB=OE$. Докажите, что $AB=EF$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка AB на рисунке 95), основанный на этой задаче.

170 Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB=A_1B_1$, $\angle A=\angle A_1$, $AD=A_1D_1$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

171 В треугольниках ABC и ADC стороны BC и AD равны и пересекаются в точке O, $\angle OAC=\angle OCA$. Докажите, что треугольники ABO и CDO равны.

172 На рисунке 96 $AC=AD$, $AB\perp CD$. Докажите, что $BC=BD$ и $\angle ACB=\angle ADB$.

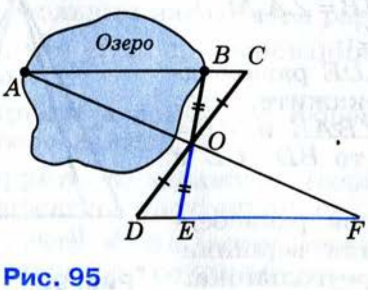


Рис. 95

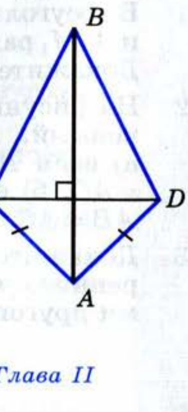


Рис. 96

173* Докажите, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника.

174* Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$.

175* На сторонах угла XOY отмечены точки A, B, C и D так, что $OA = OB$, $AC = BD$ (рис. 97). Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Докажите, что луч OE — биссектриса угла XOY. Опишите способ построения биссектрисы угла, основанный на этом факте.

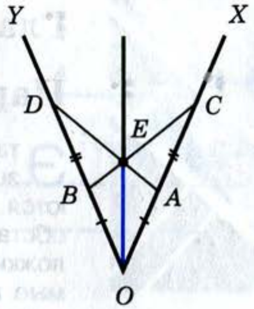


Рис. 97

176* Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников.

177* Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и L, а на сторонах A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — точки K_1 и L_1 так, что $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$. Докажите, что: а) $KL = K_1L_1$; б) $AL = A_1L_1$.

178* Даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка D, не лежащая на этой прямой. Докажите, что по крайней мере два из трёх отрезков AD, BD и CD не равны друг другу.

179* На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle PXB = \angle QXC$, где X — середина основания BC. Докажите, что $BQ = CP$.

180 Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, с центром на данной прямой.

181 Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

182 Даны прямая a, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на прямой a и $AC = PQ$.

183 Даны окружность, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на данной окружности и $AC = PQ$.

184 На стороне BC треугольника ABC постройте точку, равноудалённую от вершин A и C.

185 С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на четыре равные части.

Глава III

Параллельные прямые

Эта глава посвящена изучению параллельных прямых. Так называются две прямые на плоскости, которые не пересекаются. Отрезки параллельных прямых мы видим в окружающей обстановке — это два края прямоугольного стола, два края обложки книги, две штанги троллейбуса и т. д. Параллельные прямые играют в геометрии очень важную роль. В этой главе вы узнаете о том, что такое аксиомы геометрии и в чём состоит аксиома параллельных прямых — одна из самых известных аксиом геометрии.

§1 Признаки параллельности двух прямых

24 Определение параллельных прямых

В п. 1 мы отмечали, что две прямые либо имеют одну общую точку, т. е. пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т. е. не пересекаются.

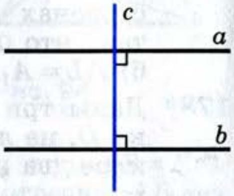


Рис. 98

Определение

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначают так: $a \parallel b$.

На рисунке 98 изображены прямые a и b, перпендикулярные к прямой c. В п. 12 мы установили, что такие прямые a и b не пересекаются, т. е. они параллельны.

Наряду с параллельными прямыми часто рассматривают параллельные отрезки. Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. На рисунке 99, *а* отрезки AB и CD параллельны ($AB \parallel CD$), а отрезки MN и CD не параллельны. Аналогично

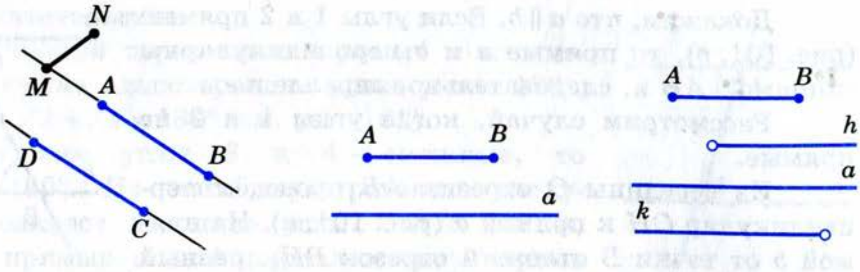


Рис. 99 а) б) в)

определяется параллельность отрезка и прямой (рис. 99, *б*), луча и прямой, отрезка и луча, двух лучей (рис. 99, *в*).

25 Признаки параллельности двух прямых

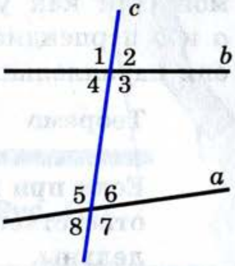


Рис. 100

Прямая *c* называется секущей по отношению к прямым *a* и *b*, если она пересекает их в двух точках (рис. 100). При пересечении прямых *a* и *b* секущей *c* образуется восемь углов, которые на рисунке 100 обозначены цифрами. Некоторые пары этих углов имеют специальные названия:

накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6;

односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6;

соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

Рассмотрим три признака параллельности двух прямых, связанные с этими парами углов.

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых *a* и *b* секущей *AB* накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 101, *a*).

Докажем, что $a \parallel b$. Если углы 1 и 2 прямые (рис. 101, *б*), то прямые a и b перпендикулярны к прямой AB и, следовательно, параллельны.

Рассмотрим случай, когда углы 1 и 2 не прямые.

Из середины O отрезка AB проведём перпендикуляр OH к прямой a (рис. 101, *в*). На прямой b от точки B отложим отрезок BH_1, равный отрезку AH, как показано на рисунке 101, *в*, и проведём отрезок OH_1. Треугольники OHA и OH_1B равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$. Из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что точка H_1 лежит на продолжении луча OH, т. е. точки H, O и H_1 лежат на одной прямой, а из равенства $\angle 5 = \angle 6$ следует, что угол 6 — прямой (так как угол 5 — прямой). Итак, прямые a и b перпендикулярны к прямой HH_1, поэтому они параллельны. **Теорема доказана.**

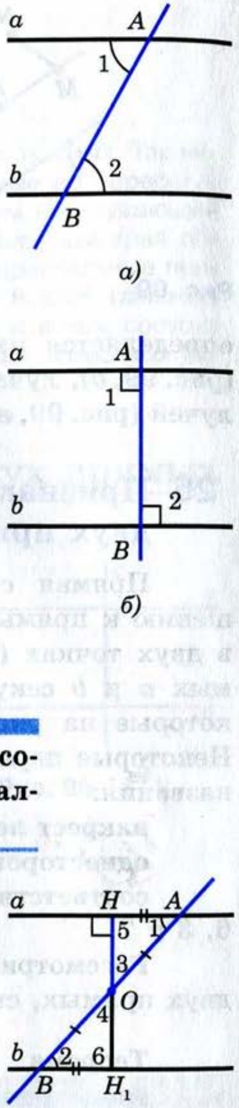


Рис. 101

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей c соответственные углы равны, например $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 102).

Так как углы 2 и 3 — вертикальные, то $\angle 2 = \angle 3$. Из этих двух равенств следует, что $\angle 1 = \angle 3$. Но углы 1 и 3 — накрест лежащие, поэтому прямые a и b параллельны. **Теорема доказана.**

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей c сумма односторонних углов равна 180°, например $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (см. рис. 102).

Так как углы 3 и 4 — смежные, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Из этих двух равенств следует, что накрест лежащие углы 1 и 3 равны, поэтому прямые a и b параллельны. **Теорема доказана.**

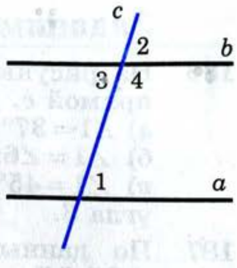


Рис. 102

26 Практические способы построения параллельных прямых

Признаки параллельности прямых лежат в основе способов построения параллельных прямых с помощью различных инструментов, используемых на практике. Рассмотрим, например, способ построения параллельных прямых с помощью чертёжного угольника и линейки.

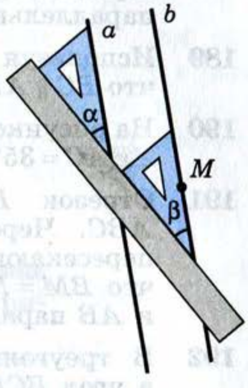


Рис. 103

Чтобы построить прямую, проходящую через точку M и параллельную данной прямой a, приложим чертёжный угольник к прямой a, а к нему линейку так, как показано на рисунке 103. Затем, передвигая угольник вдоль линейки, добьёмся того, чтобы точка M оказалась на стороне угольника, и проведём прямую b. Прямые a и b параллельны, так как соответственные углы, обозначенные на рисунке 103 буквами α и β, равны.


Рис. 104

На рисунке 104 показан способ построения параллельных прямых при помощи **рейсшины**. Этим способом пользуются в чертёжной практике.

Аналогичный способ применяется при выполнении столярных работ, где для разметки параллельных прямых используется **малка** (две деревянные планки, скреплённые шарниром, рис. 105).

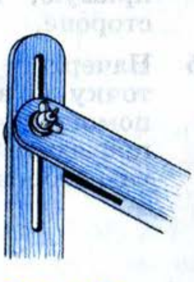


Рис. 105

Задачи

186 На рисунке 106 прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что $a \parallel b$, если:
а) $\angle 1 = 37°$, $\angle 7 = 143°$;
б) $\angle 1 = \angle 6$;
в) $\angle 1 = 45°$, а угол 7 в три раза больше угла 3.

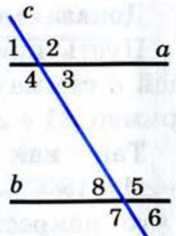


Рис. 106

187 По данным рисунка 107 докажите, что $AB \parallel DE$.

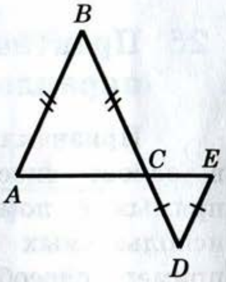


Рис. 107

188 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

189 Используя данные рисунка 108, докажите, что $BC \parallel AD$.

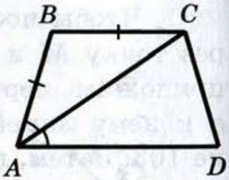


Рис. 108

190 На рисунке 109 $AB = BC$, $AD = DE$, $\angle C = 70°$, $\angle EAC = 35°$. Докажите, что $DE \parallel AC$.

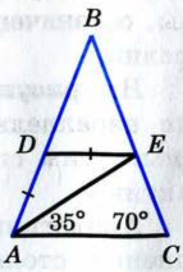


Рис. 109

191 Отрезок BK — биссектриса треугольника ABC. Через точку K проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке M так, что $BM = MK$. Докажите, что прямые KM и AB параллельны.

192 В треугольнике ABC угол A равен $40°$, а угол BCE, смежный с углом ACB, равен $80°$. Докажите, что биссектриса угла BCE параллельна прямой AB.

193 ☐ В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

194 Начертите треугольник. Через каждую вершину этого треугольника с помощью чертёжного угольника и линейки проведите прямую, параллельную противоположной стороне.

195 Начертите треугольник ABC и отметьте точку D на стороне AC. Через точку D с помощью чертёжного угольника и линейки проведите прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника.

§2 Аксиома параллельных прямых

27 Об аксиомах геометрии

Изучая свойства геометрических фигур, мы доказали ряд теорем. При этом мы опирались, как правило, на доказанные ранее теоремы. А на чём основаны доказательства самых первых теорем геометрии? Ответ на этот вопрос такой: некоторые утверждения о свойствах геометрических фигур принимаются в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и вообще строится вся геометрия. Такие исходные положения называются **аксиомами**.

Некоторые аксиомы были сформулированы ещё в первой главе (хотя они и не назывались там аксиомами). Например, аксиомой является утверждение о том, что

через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Многие другие аксиомы, хотя и не были выделены особо, но фактически использовались в наших рассуждениях. Так, сравнение двух отрезков мы проводили с помощью наложения одного отрезка на другой. Возможность такого наложения вытекает из следующей аксиомы:

на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Сравнение двух углов основано на аналогичной аксиоме:

от любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.

Все эти аксиомы являются наглядно очевидными и не вызывают сомнений. Само слово «аксиома» происходит от греческого «аксиос», что означает «ценный, достойный». Полный список аксиом планиметрии, принятых в нашем курсе геометрии, мы приводим в конце учебника.

Такой подход к построению геометрии, когда сначала формулируются исходные положения — аксиомы, а затем на их основе путём логических рассуждений доказываются другие утверждения, зародился ещё в глубокой древности и был изложен в знаменитом сочинении «Начала» древнегреческого учёного Евклида. Некоторые из аксиом Евклида (часть из них он называл **постулатами**) и сейчас используются в курсах геометрии, а сама геометрия, изложенная в «Началах», называется **евклидовой геометрией.** В следующем пункте мы познакомимся с одной из самых известных аксиом геометрии.

Евклид
(III в. до н. э.)

28 Аксиома параллельных прямых

Рассмотрим произвольную прямую a и точку M, не лежащую на ней (рис. 110, *а*). Докажем, что через точку M можно провести прямую, параллельную прямой a. Для этого проведём через точку M две прямые: сначала прямую c перпендикулярно к прямой a, а затем прямую b перпендикулярно к прямой c (рис. 110, *б*). Так как прямые a и b перпендикулярны к прямой c, то они параллельны.

Итак, через точку M проходит прямая b, параллельная прямой a. Возникает следующий вопрос: можно ли через точку M провести ещё одну прямую, параллельную прямой a?

Нам представляется, что если прямую b «повернуть» даже на очень малый угол вокруг точки M, то она пересечёт прямую a (прямая b' на рисунке 110, *б*). Иными словами, нам кажется, что через точку M нельзя провести другую прямую (отличную от b), параллельную прямой a. А можно ли это утверждение доказать?

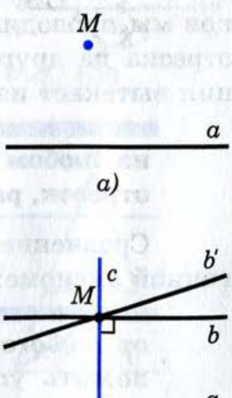


Рис. 110

Этот вопрос имеет большую историю. В «Началах» Евклида содержится постулат (пятый постулат Евклида), из которого следует, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Многие математики, начиная с древних времён, предпринимали попытки доказать пятый постулат Евклида, т. е. вывести его из других аксиом. Однако эти попытки каждый раз оказывались неудачными. И лишь в прошлом веке было окончательно выяснено, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, не может быть доказано на основе остальных аксиом Евклида, а само является аксиомой.

Н. И. Лобачевский (1792—1856)

Огромную роль в решении этого непростого вопроса сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856).

Итак, в качестве ещё одного из исходных положений мы принимаем **аксиому параллельных прямых.**

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Утверждения, которые выводятся непосредственно из аксиом или теорем, называются **следствиями**. Например, утверждения 1 и 2 (см. с. 35) являются следствиями из теоремы о биссектрисе равнобедренного треугольника.

Рассмотрим некоторые следствия из аксиомы параллельных прямых.

1°. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Действительно, пусть прямые a и b параллельны и прямая c пересекает прямую a в точке M (рис. 111, a). Докажем, что прямая c пересекает и прямую b. Если бы прямая c не пе-

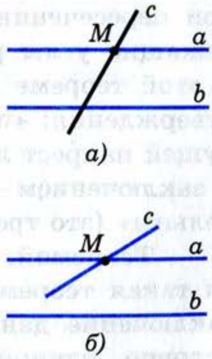


Рис. 111

ресекала прямую b, то через точку M проходили бы две прямые (прямые a и c), параллельные прямой b (рис. 111, *б*). Но это противоречит аксиоме параллельных прямых, и, значит, прямая c пересекает прямую b.

2°. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Действительно, пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 112, *а*). Докажем, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые a и b не параллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке M (рис. 112, *б*). Тогда через точку M проходят две прямые (прямые a и b), параллельные прямой c.

Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Поэтому наше предположение неверно, а значит, прямые a и b параллельны.

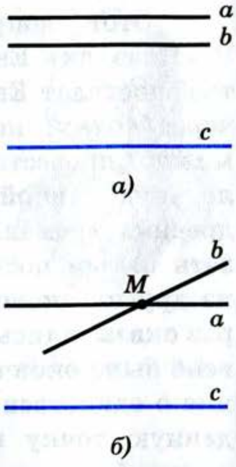


Рис. 112

29 Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

Во всякой теореме различают две части: **условие** и **заключение**. Условие теоремы — это то, что дано, а заключение — то, что требуется доказать.

Рассмотрим, например, теорему, выражающую признак параллельности двух прямых: если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. В этой теореме условием является первая часть утверждения: «при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны» (это дано), а заключением — вторая часть: «прямые параллельны» (это требуется доказать).

Теоремой, обратной данной, называется такая теорема, в которой условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы. Докажем теоремы, обратные трём теоремам п. 25.

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей MN. Докажем, что накрест лежащие углы, например 1 и 2, равны (рис. 113).

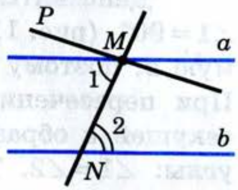


Рис. 113

Допустим, что углы 1 и 2 не равны. Отложим от луча MN угол PMN, равный углу 2, так, чтобы $\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащими углами при пересечении прямых MP и b секущей MN. По построению эти накрест лежащие углы равны, поэтому $MP \parallel b$. Мы получили, что через точку M проходят две прямые (прямые a и MP), параллельные прямой b. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, наше допущение неверно и $\angle 1 = \angle 2$. **Теорема доказана.**

Замечание

При доказательстве этой теоремы мы использовали способ рассуждений, который называется **методом доказательства от противного.**

Мы предположили, что при пересечении параллельных прямых a и b секущей MN накрест лежащие углы 1 и 2 не равны, т. е. предположили противоположное тому, что нужно доказать. Исходя из этого предположения, путём рассуждений мы пришли к противоречию с аксиомой параллельных прямых. Это означает, что наше предположение неверно и, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Такой способ рассуждений часто используется в математике. Мы им пользовались и ранее, например в п. 12 при доказательстве того, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются. Этим же методом мы пользовались в п. 28 при доказательстве следствий 1^0 и 2^0 из аксиомы параллельных прямых.

Следствие

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

Действительно, пусть $a \parallel b$, $c \perp a$, т. е. $\angle 1 = 90°$ (рис. 114). Прямая c пересекает прямую a, поэтому она пересекает также прямую b. При пересечении параллельных прямых a и b секущей c образуются равные накрест лежащие углы: $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 = 90°$, то и $\angle 2 = 90°$, т. е. $c \perp b$, что и требовалось доказать.

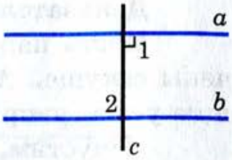


Рис. 114

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Докажем, что соответственные углы, например 1 и 2, равны (см. рис. 102). Так как $a \parallel b$, то накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Из равенств $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 3$ следует, что $\angle 1 = \angle 2$. **Теорема доказана.**

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c (см. рис. 102). Докажем, например, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Так как $a \parallel b$, то соответственные углы 1 и 2 равны. Углы 2 и 4 смежные, поэтому $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Из равенств $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ следует, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. **Теорема доказана.**

Замечание

Если доказана некоторая теорема, то отсюда ещё не следует справедливость обратного утверждения. Более того, обратное утверждение не всегда верно. Приведём простой пример. Мы знаем, что если углы вертикальные, то они равны. Обратное утверждение: «если углы равны, то они вертикальные», конечно же, неверно.

30 Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

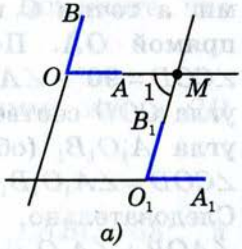
Докажем теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

Теорема

Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

Доказательство

Пусть $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — данные углы и $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый, то и угол $A_1O_1B_1$ — развёрнутый (объясните почему), поэтому эти углы равны. Пусть $\angle AOB$ — неразвёрнутый угол. Возможные случаи расположения углов AOB и $A_1O_1B_1$ изображены на рисунке 115, *а* и *б*. Прямая O_1B_1 пересекает прямую O_1A_1 и, следовательно, пересекает параллельную ей прямую OA в некоторой точке M. Параллельные прямые OB и O_1B_1 пересечены секущей OM, поэтому один из углов, образованных при пересечении прямых O_1B_1 и OA (угол 1 на рисунке 115), равен углу AOB (как накрест лежащие углы). Параллельные прямые OA и O_1A_1 пересечены секущей O_1M, поэтому либо $\angle 1 = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 115, *а*), либо $\angle 1 + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 115, *б*). Из равенства $\angle 1 = \angle AOB$ и последних двух равенств следует, что либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (см. рис. 115, *а*), либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (см. рис. 115, *б*). **Теорема доказана.**



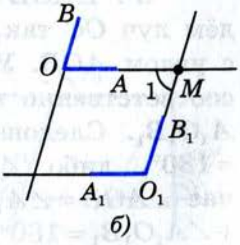


Рис. 115

Докажем теперь теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Теорема

Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

Доказательство

Пусть $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — данные углы, $OA \perp O_1A_1$, $OB \perp O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый или прямой, то и угол $A_1O_1B_1$ развёрнутый или прямой (объясните почему), поэтому эти углы равны. Пусть $\angle AOB < 180°$, $O \notin O_1A_1$, $O \notin O_1B_1$ (случаи $O \in O_1A_1$, $O \in O_1B_1$ рассмотрите самостоятельно).

Возможны два случая (рис. 116).

1^0. $\angle AOB < 90°$ (см. рис. 116, *а*). Проведём луч OC так, чтобы прямые OA и OC были взаимно перпендикулярными, а точки B и C лежали по разные стороны от прямой OA. Далее, проведём луч OD так, чтобы прямые OB и OD были взаимно перпендикулярными, а точки C и D лежали по одну сторону от прямой OA. Поскольку $\angle AOB = 90° - \angle AOD$ и $\angle COD = 90° - \angle AOD$, то $\angle AOB = \angle COD$. Стороны угла COD соответственно параллельны сторонам угла $A_1O_1B_1$ (объясните почему), поэтому либо $\angle COD = \angle A_1O_1B_1$, либо $\angle COD + \angle A_1O_1B_1 = 180°$. Следовательно, либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$.

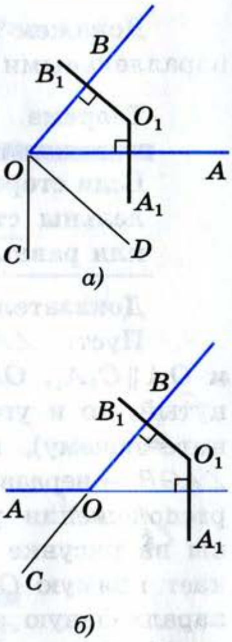


Рис. 116

2^0. $\angle AOB > 90°$ (см. рис. 116, *б*). Проведём луч OC так, чтобы угол AOC был смежным с углом AOB. Угол AOC острый, и его стороны соответственно перпендикулярны сторонам угла $A_1O_1B_1$. Следовательно, либо $\angle AOC + \angle A_1O_1B_1 = 180°$, либо $\angle AOC = \angle A_1O_1B_1$. В первом случае $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, во втором случае $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$. **Теорема доказана.**

Задачи

196 Дан треугольник ABC. Сколько прямых, параллельных стороне AB, можно провести через вершину C?

197 Через точку, не лежащую на прямой p, проведены четыре прямые. Сколько из этих прямых пересекают прямую p? Рассмотрите все возможные случаи.

198 Прямые a и b перпендикулярны к прямой p, прямая c пересекает прямую a. Пересекает ли прямая c прямую b?

199 Прямая p параллельна стороне AB треугольника ABC. Докажите, что прямые BC и AC пересекают прямую p.

200 На рисунке 117 $AD \parallel p$ и $PQ \parallel BC$. Докажите, что прямая p пересекает прямые AB, AE, AC, BC и PQ.

201 Сумма накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна $210°$. Найдите эти углы.

202 На рисунке 118 прямые a, b и c пересечены прямой d, $\angle 1 = 42°$, $\angle 2 = 140°$, $\angle 3 = 138°$. Какие из прямых a, b и c параллельны?

203 Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c, если:
а) один из углов равен $150°$;
б) один из углов на $70°$ больше другого.

204 Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b. Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D. Докажите, что $CO = OD$.

205 По данным рисунка 119 найдите $\angle 1$.

206 $\angle ABC = 70°$, а $\angle BCD = 110°$. Могут ли прямые AB и CD быть:
а) параллельными;
б) пересекающимися?

207 Ответьте на вопросы задачи **206**, если $\angle ABC = 65°$, а $\angle BCD = 105°$.

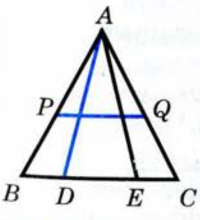


Рис. 117

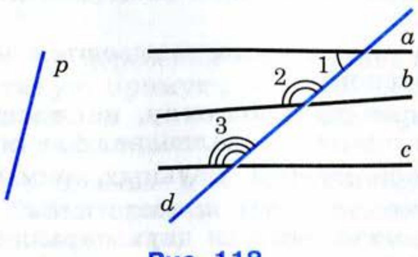


Рис. 118

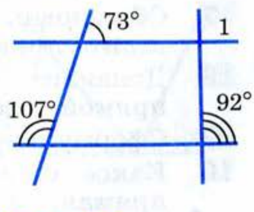


Рис. 119

208 Разность двух односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 50°. Найдите эти углы.

209 На рисунке 120 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4 = 45°$. Найдите углы 1, 2 и 3.

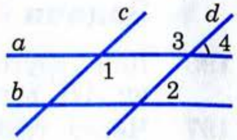


Рис. 120

210 Два тела P_1 и P_2 подвешены на концах нити, перекинутой через блоки A и B (рис. 121). Третье тело P_3 подвешено к той же нити в точке C и уравновешивает тела P_1 и P_2. (При этом $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$.) Докажите, что $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

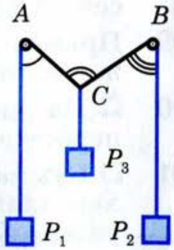


Рис. 121

211 Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что: а) биссектрисы накрест лежащих углов параллельны; б) биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

212 Прямые, содержащие высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC, пересекаются в точке H, угол B — тупой, $\angle C = 20°$. Найдите угол AHB.

Вопросы для повторения к главе III

1 Дайте определение параллельных прямых. Какие два отрезка называются параллельными?

2 Что такое секущая по отношению к двум прямым? Назовите пары углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей.

3 Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

4 Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

5 Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

6 Расскажите о практических способах проведения параллельных прямых.

7 Объясните, какие утверждения называются аксиомами. Приведите примеры аксиом.

8 Докажите, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной.

9 Сформулируйте аксиому параллельных прямых.

10 Какое утверждение называется следствием? Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

11 Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

12 Какая теорема называется обратной данной теореме? Приведите примеры теорем, обратных данным.

13 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.

14 Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

15 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей:

а) соответственные углы равны;

б) сумма односторонних углов равна 180°.

16 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

17 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Дополнительные задачи

213 На рисунке 122 $CE = ED$, $BE = EF$ и $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

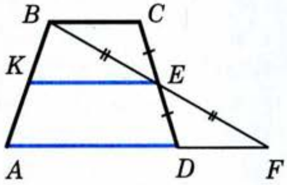


Рис. 122

214 Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC и перпендикулярная к AD, пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MD \parallel AB$.

215 По данным рисунка 123 найдите угол 1.

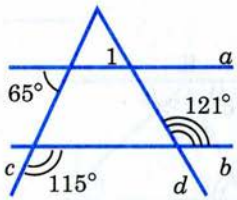


Рис. 123

216 На рисунке 124 DE — биссектриса угла ADF. По данным рисунка найдите углы треугольника ADE.

217 Прямые a и b параллельны прямой c. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает также и прямую b.

218 Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую a и параллельна прямой b? Ответ обоснуйте.

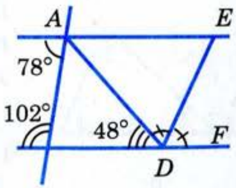


Рис. 124

219* Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

220 ☐ Докажите, что если при пересечении двух прямых a и b секущей накрест лежащие углы не равны, то прямые a и b пересекаются.

221 ☐ Даны треугольник ABC и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC, а середина отрезка CN — с серединой стороны AB. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

222 Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. С помощью циркуля и линейки через точку A проведите прямую, параллельную прямой a.

Глава IV

Соотношения между сторонами и углами треугольника

В этой главе мы снова обращаемся к треугольникам и будем обсуждать различные их свойства, при этом большое внимание уделим прямоугольным треугольникам, т. е. таким треугольникам, у которых один угол прямой. Некоторые свойства прямоугольных треугольников находят практическое применение, например, в конструкциях уголковых отражателей, которые широко используются в различных устройствах — от велосипедов до космических аппаратов. Об этом также будет рассказано в данной главе.

§ 1 Сумма углов треугольника

31 Теорема о сумме углов треугольника

Докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему о сумме углов треугольника.

Теорема

Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство

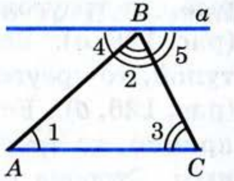
Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

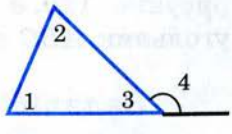
Проведём через вершину B прямую a, параллельную стороне AC (рис. 125, $а$). Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей BC. Поэтому

$$\angle 4 = \angle 1,\ \angle 5 = \angle 3. \qquad (1)$$

Очевидно, сумма углов 4, 2 и 5 равна развёрнутому углу с вершиной B, т. е.



а)



б)

Рис. 125

$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$. Отсюда, учитывая равенства (1), получаем: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, или $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. **Теорема доказана.**

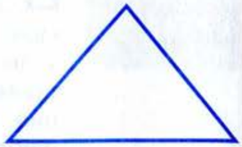
Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. Докажем, что **внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.**

Обратимся к рисунку 125, *б*, на котором угол 4 — внешний угол, смежный с углом 3 данного треугольника. Так как $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, а по теореме о сумме углов треугольника $(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 = 180°$, то $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, что и требовалось доказать.

32 Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники

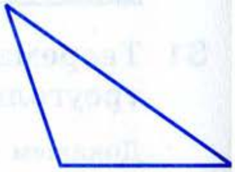
Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то сумма двух других углов не превосходит 90°, и поэтому каждый из них острый. Таким образом, **в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.**

Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется **остроугольным** (рис. 126, *а*). Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется **тупоугольным** (рис. 126, *б*). Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется **прямоугольным.** Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой**, а две другие стороны — **катетами.** На рисунке 126, *в* изображён прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C.



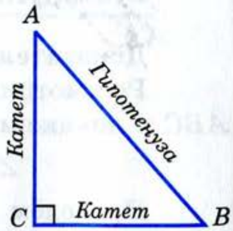
Остроугольный треугольник

а)



Тупоугольный треугольник

б)



Прямоугольный треугольник

в)

Рис. 126

Задачи

223 Найдите угол C треугольника ABC, если: а) $\angle A = 65°$, $\angle B = 57°$; б) $\angle A = 24°$, $\angle B = 130°$; в) $\angle A = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$; г) $\angle A = 60° + \alpha$, $\angle B = 60° - \alpha$.

224 Найдите углы треугольника ABC, если $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$.

225 Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

226 Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.

227 Найдите углы равнобедренного треугольника, если: а) угол при основании в два раза больше угла, противолежащего основанию; б) угол при основании в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

228 Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) 40°; б) 60°; в) 100°.

229 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C = 50°$.

230 Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 58°$, $\angle B = 96°$.

231 Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

232 Верно ли утверждение: если треугольник равнобедренный, то один из его внешних углов в два раза больше угла треугольника, не смежного с этим внешним углом?

233 Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

234 Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 115°. Найдите углы треугольника.

235 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 110°$.

§2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

33 Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника

Теорема

В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, против большего угла лежит бóльшая сторона.

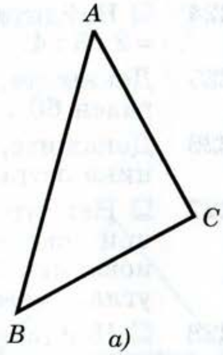
Доказательство

1) Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC (рис. 127, *а*). Докажем, что $\angle C > \angle B$.

Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 127, *б*). Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B. Следовательно, угол 1 является частью угла C, и, значит, $\angle C > \angle 1$. Угол 2 — внешний угол треугольника BDC, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Углы 1 и 2 равны как углы при основании равнобедренного треугольника ADC. Таким образом, $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$. Отсюда следует, что $\angle C > \angle B$.

2) Пусть в треугольнике ABC $\angle C > \angle B$. Докажем, что $AB > AC$.

Предположим, что это не так. Тогда либо $AB = AC$, либо $AB < AC$. В первом случае треугольник ABC — равнобедренный, и, значит, $\angle C = \angle B$. Во втором случае $\angle B > \angle C$ (против большей стороны лежит больший угол). И то и другое противоречит условию: $\angle C > \angle B$. Поэтому наше предположение неверно, и, следовательно, $AB > AC$. **Теорема доказана.**



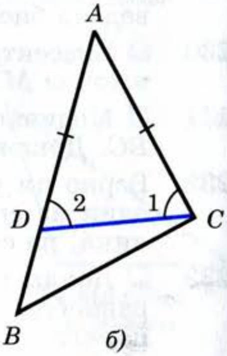


Рис. 127

Следствие 1

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

В самом деле, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого. Так как прямой угол больше острого, то гипотенуза больше катета.

Следствие 2

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника).

Докажем этот признак. Пусть в треугольнике два угла равны. Тогда равны и стороны, лежащие против этих углов. Действительно, если предположить, что одна из указанных сторон больше другой, то угол, лежащий против неё, будет больше угла, лежащего против другой стороны, а это противоречит условию (тому, что данные углы равны).

Итак, в треугольнике две стороны равны, т. е. треугольник — равнобедренный.

34 Неравенство треугольника

Теорема

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $AB < AC + CB$. Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB (рис. 128). В равнобедренном треугольнике BCD $\angle 1 = \angle 2$, а в треугольнике ABD $\angle ABD > \angle 1$ и, значит, $\angle ABD > \angle 2$.

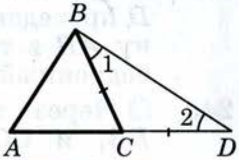


Рис. 128

Так как в треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона, то $AB < AD$. Но $AD = AC + CD = AC + CB$, поэтому $AB < AC + CB$. **Теорема доказана.**

Следствие

Для любых трёх точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$.

Каждое из этих неравенств называется **неравенством треугольника.**

Задачи

236 Сравните углы треугольника ABC и выясните, может ли быть угол A тупым, если: а) $AB > BC > AC$; б) $AB = AC < BC$.

237 Сравните стороны треугольника ABC, если: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$.

238 Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

239 Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведённой из той же вершины.

240 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный.

241 Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

242 Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то треугольник равнобедренный.

243 Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная его биссектрисе AA_1 и пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

244 Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE — равнобедренный.

245 Через точку пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $MN = BM + CN$.

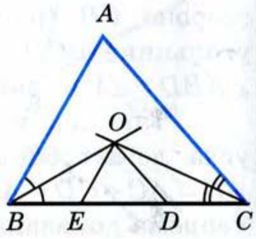


Рис. 129

246 На рисунке 129 лучи BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$. Докажите, что периметр $\triangle EDO$ равен длине отрезка BC.

247 На рисунке 130 $AB = AC$, $AP = AQ$. Докажите, что:
а) треугольник BOC — равнобедренный;
б) прямая OA проходит через середину основания BC и перпендикулярна к нему.

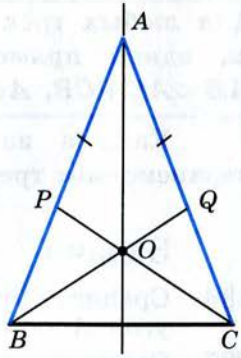


Рис. 130

248 Существует ли треугольник со сторонами: а) 1 м, 2 м и 3 м; б) 1,2 дм, 1 дм и 2,4 дм?

249 В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая равна 10 см. Какая из них является основанием?

250 Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 7 см и 3 см; б) 8 см и 2 см; в) 10 см и 5 см.

251 Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Решение
Докажем, например, что в треугольнике ABC $AB > AC - BC$. Так как $AB + BC > AC$, то $AB > AC - BC$.

252 Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Периметр треугольника равен 74 см, а одна из сторон равна 16 см. Найдите две другие стороны треугольника.

253 Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов — острый. Найдите стороны треугольника.

§3 Прямоугольные треугольники

35 Некоторые свойства прямоугольных треугольников

Рассмотрим свойства прямоугольных треугольников, которые устанавливаются с помощью теоремы о сумме углов треугольника.

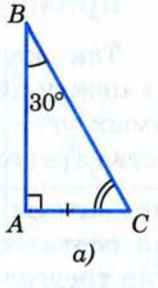
1°. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

В самом деле, сумма углов треугольника равна 180°, а прямой угол равен 90°, поэтому сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2°. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором угол A — прямой, $\angle B = 30°$ и, значит, $\angle C = 60°$ (рис. 131, *а*). Докажем, что $AC = \frac{1}{2}BC$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 131, *б*. Получим треугольник BCD, в котором $\angle B = \angle D = 60°$, поэтому $DC = BC$. Но



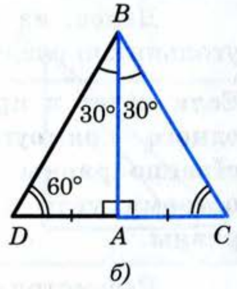


Рис. 131

$AC = \frac{1}{2} DC$. Следовательно, $AC = \frac{1}{2} BC$, что и требовалось доказать.

3^0. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, у которого катет AC равен половине гипотенузы BC (рис. 132, *а*). Докажем, что $\angle ABC = 30°$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 132, *б*. Получим равносторонний треугольник BCD. Углы равностороннего треугольника равны друг другу (объясните почему), поэтому каждый из них равен 60°. В частности, $\angle DBC = 60°$. Но $\angle DBC = 2\angle ABC$. Следовательно, $\angle ABC = 30°$, что и требовалось доказать.

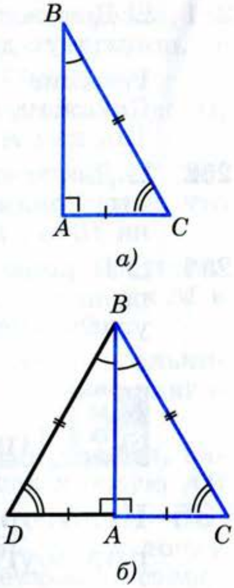


Рис. 132

36 Признаки равенства прямоугольных треугольников

Так как в прямоугольном треугольнике угол между двумя катетами прямой, а любые два прямых угла равны, то из первого признака равенства треугольников следует:

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

Далее, из второго признака равенства треугольников следует:

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Рассмотрим ещё два признака равенства прямоугольных треугольников.

Теорема

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Из свойства 1^0 п. 35 следует, что в таких треугольниках два других острых угла также равны, поэтому треугольники равны по второму признаку равенства треугольников, т. е. по стороне (гипотенузе) и двум прилежащим к ней углам. **Теорема доказана.**

Теорема

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы C и C_1 — прямые, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 133, *а*, *б*). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle C = \angle C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина C совместится с вершиной C_1, а стороны CA и CB наложатся соответственно на лучи C_1A_1 и C_1B_1. Поскольку $CB = C_1B_1$, то вершина B совместится с вершиной B_1. Но тогда вершины A и A_1 также совместятся. В самом деле, если предположить, что точка A совместится с некоторой другой точкой A_2 луча C_1A_1, то получим равнобедренный треугольник $A_1B_1A_2$, в котором углы при основании A_1A_2 не равны (на рисунке 133, *б* $\angle A_2$ — острый, а $\angle A_1$ — тупой как смежный с острым углом $B_1A_1C_1$). Но это невозможно, поэтому вершины A и A_1 совместятся.

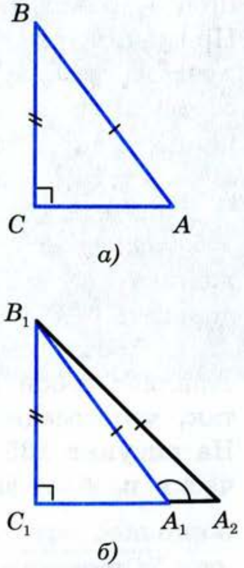


Рис. 133

Следовательно, полностью совместятся треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. они равны. **Теорема доказана.**

37* Уголковый отражатель

Мы знаем, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°. Это свойство лежит в основе конструкции простейшего уголкового отражателя. Прежде чем описать его устройство, рассмотрим следующую задачу.

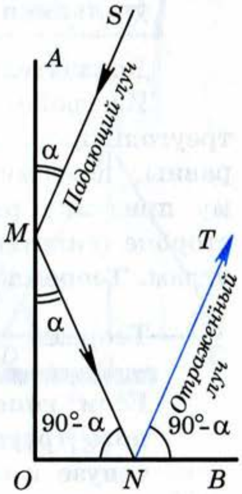


Рис. 134

Задача

Угол между зеркалами OA и OB равен 90°. Луч света, падающий на зеркало OA под углом α, отражается от него, а затем отражается от зеркала OB (рис. 134). Доказать, что падающий и отражённый лучи параллельны.

Решение

По закону отражения света падающий луч SM и луч MN составляют с прямой OA равные углы α. Так как треугольник MON прямоугольный, то угол MNO равен $90° - \alpha$. Применяя опять закон отражения света, получаем, что луч MN и отражённый луч NT составляют с прямой OB равные углы. Обращаясь к рисунку 134, мы видим, что $\angle SMN = 180° - 2\alpha$, $\angle MNT = 180° - 2\,(90° - \alpha) = 2\alpha$, поэтому $\angle SMN + \angle MNT = 180°$.

Следовательно, падающий луч SM и отражённый луч NT параллельны, что и требовалось доказать.

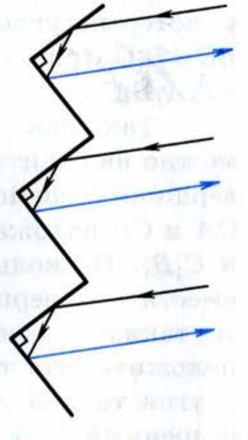


Рис. 135

Простейший уголковый отражатель представляет собой несколько зеркал, составленных так, что соседние зеркала образуют угол в 90°. На рисунке 135 в виде ломаной линии схематически изображён такой отражатель. Представим

* Здесь и в дальнейшем пункты, отмеченные звёздочкой, не являются обязательными.

себе, что на этот отражатель падает пучок параллельных лучей (на рисунке эти лучи изображены чёрными линиями со стрелками). Тогда отражённые лучи будут параллельны падающим лучам (эти лучи изображены цветными линиями со стрелками). Таким образом, уголковый отражатель «возвращает назад» падающий на него пучок параллельных лучей при любом расположении отражателя по отношению к падающему пучку лучей.

Это свойство уголкового отражателя используется в технике. Так, уголковый отражатель устанавливается на заднем крыле велосипеда для того, чтобы «возвращать назад» свет автомобильных фар. Это даёт возможность водителю автомобиля видеть ночью идущий впереди велосипед. Отметим, что уголковый отражатель, используемый на практике, устроен более сложно, чем описанный простейший, но принцип его действия тот же, что и у простейшего уголкового отражателя.

Уголковый отражатель был установлен на одной из отечественных автоматических станций, запущенных на Луну. С поверхности Земли участок Луны, на котором находилась автоматическая станция с уголковым отражателем, был освещён лучом лазера. Луч «вернулся» в то же место, где находился лазер. Измерив точное время от момента включения лазера до момента возвращения сигнала, удалось с весьма высокой точностью найти расстояние от поверхности Земли до поверхности Луны.

Задачи

254 Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

255 □ В равнобедренном треугольнике CDE с основанием CE проведена высота CF. Найдите $\angle ECF$, если $\angle D = 54°$.

256 □ Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего из катетов равна 26,4 см. Найдите гипотенузу треугольника.

257 □ В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C внешний угол при вершине A равен 120°, $AC + AB = 18$ см. Найдите AC и AB.

258 □ Из середины D стороны BC равностороннего треугольника ABC проведён перпендикуляр DM к прямой AC. Найдите AM, если $AB = 12$ см.

259 □ Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Высота, проведённая к боковой стороне, равна 9 см. Найдите основание треугольника.

260 □ Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 7,6 см, а боковая сторона треугольника равна 15,2 см. Найдите углы этого треугольника.

261 Докажите, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведённые из вершин основания, равны.

262 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 — прямые, BD и B_1D_1 — биссектрисы. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle B = \angle B_1$ и $BD = B_1D_1$.

263 Высоты, проведённые к боковым сторонам AB и AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Найдите углы треугольника, если $\angle BMC = 140°$.

264 Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 55°$, $\angle B = 67°$.

265 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса AF и высота AH. Найдите углы треугольника AHF, если $\angle B = 112°$.

266 На сторонах угла O отмечены точки A и B так, что $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке C. Докажите, что луч OC — биссектриса угла O.

267 Докажите, что два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведённые из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведённым из концов этой стороны, другого треугольника.

268 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

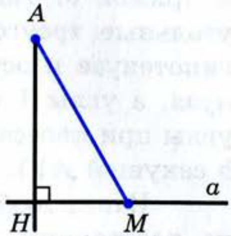
269 Докажите, что $\triangle ABC \doteq \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$, где BH и B_1H_1 — высоты $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$.

270 Внутри угла дана точка A. Постройте прямую, проходящую через точку A и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

§4 Построение треугольника по трём элементам

38 Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

Расстоянием между двумя точками мы назвали длину отрезка, соединяющего эти точки. Введём теперь понятия расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми.



Отрезок AM — наклонная к прямой a

Рис. 136

Пусть отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой a, M — любая точка прямой a, отличная от H (рис. 136). Отрезок AM называется **наклонной,** проведённой из точки A к прямой a. В прямоугольном треугольнике AHM катет AH меньше гипотенузы AM.

Следовательно, **перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.**

Длина перпендикуляра, проведённого из точки к прямой, называется расстоянием от этой точки до прямой.

Отметим, что расстояние от точки до прямой равно наименьшему из расстояний от этой точки до точек прямой.

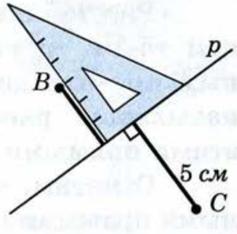


Рис. 137

На рисунке 137 расстояние от точки B до прямой p равно 3 см, а расстояние от точки C до этой прямой равно 5 см.

Прежде чем ввести понятие расстояния между параллельными прямыми, рассмотрим одно из важнейших свойств параллельных прямых.

Теорема

Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Доказательство

Рассмотрим параллельные прямые a и b. Отметим на прямой a точку A и проведём из этой точки перпендикуляр AB к прямой b (рис. 138). Докажем, что расстояние от любой точки X прямой a до прямой b равно AB.

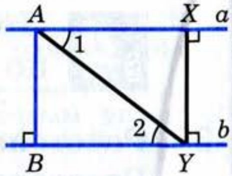


Рис. 138

Проведём из точки X перпендикуляр XY к прямой b. Так как $XY \perp b$, то $XY \perp a$. Прямоугольные треугольники ABY и YXA равны по гипотенузе и острому углу (AY — общая гипотенуза, а углы 1 и 2 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых a и b секущей AY). Следовательно, $XY = AB$.

Итак, любая точка X прямой a находится на расстоянии AB от прямой b. Очевидно, все точки прямой b находятся на таком же расстоянии от прямой a. **Теорема доказана.**

Из доказанной теоремы следует, что точка, движущаяся по одной из параллельных прямых, всё время находится на одном и том же расстоянии от другой прямой.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется расстоянием между этими прямыми.

Отметим, что расстояние между параллельными прямыми равно наименьшему из расстояний от точек одной прямой до точек другой прямой.

Замечание 1

Справедливо утверждение, обратное доказанной теореме: **все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудалённые от неё, лежат на прямой, параллельной данной.** (Докажите это самостоятельно.)

Замечание 2

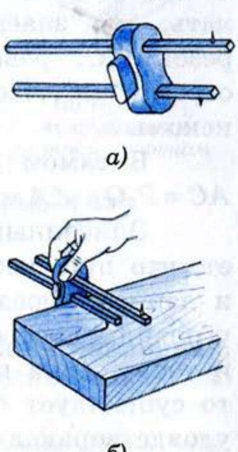
Из доказанной теоремы и ей обратной следует, что **множество всех точек плоскости, на-**

ходящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.**

В самом деле, пусть a — данная прямая, d — данное расстояние. Отметим на прямой a произвольную точку A и проведём отрезок AB длины d, перпендикулярный к прямой a; через точку B проведём прямую b, параллельную прямой a (сделайте соответствующий рисунок). По доказанной теореме все точки прямой b находятся на расстоянии d от прямой a, т. е. все они принадлежат искомому множеству. В силу обратной теоремы любая точка искомого множества лежит на прямой b. Таким образом, искомым множеством является прямая b.

Множество всех точек, удовлетворяющих какому-либо условию, иногда называют **геометрическим местом точек**, удовлетворяющих этому условию. Можно сказать тем самым, что геометрическое место точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.

На этом факте основано устройство инструмента, называемого **рейсмусом** (рис. 139, *а*). Рейсмус используется в столярном деле для разметки на поверхности деревянного бруска прямой, параллельной краю бруска. При передвижении рейсмуса вдоль края бруска металлическая игла прочерчивает отрезок прямой, параллельный краю бруска (рис. 139, *б*).



а)

б)

Рис. 139

39 Построение треугольника по трём элементам

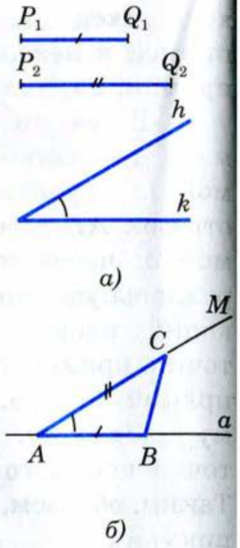
Задача 1

Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Решение

Прежде всего уточним, как нужно понимать эту задачу, т. е. что здесь дано и что нужно построить.

Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и угол hk (рис. 140, *а*). Требуется с помощью циркуля и линейки (без масштабных делений) построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол A между этими сторонами равен данному углу hk.



Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Рис. 140

Проведём прямую a и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 140, *б*). Затем построим угол BAM, равный данному углу hk (как это сделать, мы знаем). На луче AM отложим отрезок AC, равный отрезку P_2Q_2, и проведём отрезок BC. Построенный треугольник ABC — искомый.

В самом деле, по построению $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$.

Описанный ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1, P_2Q_2 и данном неразвёрнутом угле hk искомый треугольник построить можно. Так как прямую a и точку A на ней можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условиям задачи. Все эти треугольники равны друг другу (по первому признаку равенства треугольников), поэтому принято говорить, что **данная задача имеет единственное решение.**

Задача 2

Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Решите эту задачу самостоятельно.

Задача 3

Построить треугольник по трём его сторонам.

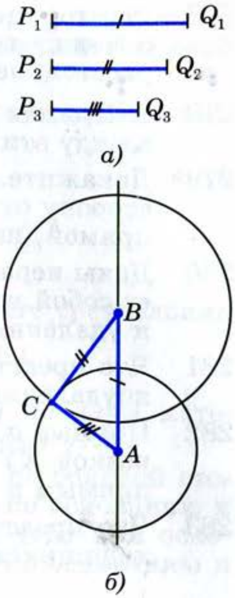
Решение

Пусть даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 141, *а*). Требуется построить треугольник ABC, в котором $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$.

Проведём прямую и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 141, *б*). Затем построим две окружности: одну — с центром A и радиусом P_3Q_3, а другую — с центром B и радиусом P_2Q_2. Пусть точка C — одна из точек пересечения этих окружностей. Проведя отрезки AC и BC, получим искомый треугольник ABC.

В самом деле, по построению $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$, т. е. стороны треугольника ABC равны данным отрезкам.

Задача 3 не всегда имеет решение. Действительно, во всяком треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей стороны, поэтому если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других, то нельзя построить треугольник, стороны которого равнялись бы данным отрезкам.



Построение треугольника по трём сторонам

Рис. 141

Задачи

271 Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, сумма длин которых равна 17 см, а разность длин равна 1 см. Найдите расстояние от точки до прямой.

272 В равностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Расстояние от точки D до прямой AC равно 6 см. Найдите расстояние от вершины A до прямой BC.

273 Сумма гипотенузы CE и катета CD прямоугольного треугольника CDE равна 31 см, а их разность равна 3 см. Найдите расстояние от вершины C до прямой DE.

274 Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от боковых сторон.

275 На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка M, равноудалённая от боковых сторон. Докажите, что CM — высота треугольника ABC.

276 Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.

277 Расстояние между параллельными прямыми a и b равно 3 см, а между параллельными прямыми a и c равно 5 см. Найдите расстояние между прямыми b и c.

278 ❑ Прямая AB параллельна прямой CD. Найдите расстояние между этими прямыми, если $\angle ADC = 30°$, $AD = 6$ см.

279* Докажите, что все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудалённые от неё, лежат на прямой, параллельной данной.

280 Даны неразвёрнутый угол ABC и отрезок PQ. Что представляет собой множество всех точек, лежащих внутри данного угла и удалённых от прямой BC на расстояние PQ?

281 Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудалённых от двух данных параллельных прямых?

282 Прямые a и b параллельны. Докажите, что середины всех отрезков XY, где $X \in a$, $Y \in b$, лежат на прямой, параллельной прямым a и b и равноудалённой от этих прямых.

283 Что представляет собой множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой?

Задачи на построение

284 ❑ Даны прямая a и отрезок AB. Постройте прямую p, параллельную прямой a, так, чтобы расстояние между прямыми a и p было равно AB.

Решение

Отметим на прямой a какую-нибудь точку C и проведём через точку C прямую b, перпендикулярную к прямой a (рис. 142). Затем на одном из лучей прямой b, исходящих из точки C, отложим отрезок CD, равный отрезку AB. Через точку D проведём прямую p, перпендикулярную к прямой b. Прямая p — искомая (объясните почему).

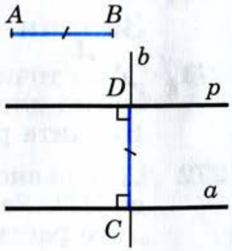


Рис. 142

Как видно из построения, для любой данной прямой a и любого данного отрезка AB искомую прямую можно построить, причём задача имеет два решения (прямые p и p_1 на рисунке 143).

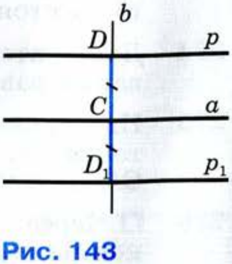


Рис. 143

285 ❑ Даны пересекающиеся прямые a и b и отрезок PQ. На прямой a постройте точку, удалённую от прямой b на расстояние PQ.

286 Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведённой из вершины этого угла.

287 Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой.

288 Даны отрезок PQ и угол hk. Постройте треугольник ABC так, чтобы:

а) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle hk$;

б) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{4}\angle hk$.

289 Даны два угла hk и h_1k_1 и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = PQ$, $\angle A = \angle hk$, $\angle B = \frac{1}{2}\angle h_1k_1$.

290 Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему к нему острому углу.

291 Постройте равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; б) по основанию и углу при основании; в) по боковой стороне и углу при основании; г) по основанию и боковой стороне; д) по основанию и медиане, проведённой к основанию.

292 Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Постройте треугольник ABC так, чтобы:

а) $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = 2P_3Q_3$;

б) $AB = 2P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = \frac{3}{2}P_3Q_3$.

Всегда ли задача имеет решение?

293 Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведённой к этой стороне.

Решение

Даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk (рис. 144, *а*). Требуется построить треугольник ABC, у которого одна из сторон, скажем AB, равна отрезку P_1Q_1, один из прилежащих к ней углов, например угол A, равен данному углу hk, а высота CH, проведённая к стороне AB, равна данному отрезку P_2Q_2.

Построим угол XAY, равный данному углу hk, и отложим на луче AX отрезок AB, равный данному отрезку P_1Q_1 (рис. 144, *б*).

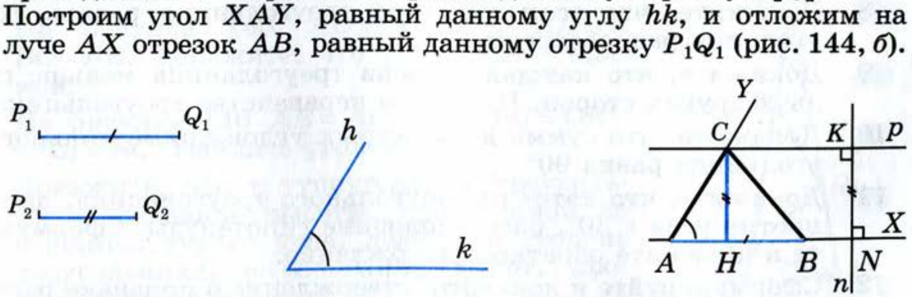


Рис. 144

Для построения вершины C искомого треугольника заметим, что расстояние от точки C до прямой AB должно равняться P_2Q_2. Множеством всех точек плоскости, находящихся на расстоянии P_2Q_2 от прямой AB и лежащих по ту же сторону от прямой AB, что и точка Y, является прямая p, параллельная прямой AB и находящаяся на расстоянии P_2Q_2 от прямой AB. Следовательно, искомая точка C есть точка пересечения прямой p и луча AY. Построение прямой p описано в решении задачи **284**. Очевидно, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи: $AB = P_1Q_1$, $CH = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$.

294 Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из этих сторон.

295 Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из этих сторон.

Вопросы для повторения к главе IV

1 Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов треугольника.

2 Какой угол называется внешним углом треугольника? Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

3 Докажите, что в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.

4 Какой треугольник называется остроугольным? Какой треугольник называется тупоугольным?

5 Какой треугольник называется прямоугольным? Как называются стороны прямоугольного треугольника?

6 Докажите, что в треугольнике:

1) против большей стороны лежит больший угол;

2) обратно, против большего угла лежит бóльшая сторона.

7 Докажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

8 Докажите, что если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

9 Докажите, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Что такое неравенство треугольника?

10 Докажите, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

11 Докажите, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

12 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

13 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

14 Объясните, какой отрезок называется наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой.

15 Докажите, что перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.

16 Что называется расстоянием от точки до прямой?

17 Докажите, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

18 Что называется расстоянием между двумя параллельными прямыми?

19 Докажите, что множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.

20 Что такое геометрическое место точек? Приведите пример.

21 Объясните, как построить треугольник:
а) по двум сторонам и углу между ними;
б) по стороне и двум прилежащим к ней углам.

22 Объясните, как построить треугольник по трём сторонам. Всегда ли эта задача имеет решение?

Дополнительные задачи

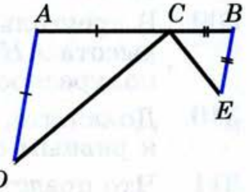


Рис. 145

296 ☐ В равнобедренном треугольнике ABC биссектрисы равных углов B и C пересекаются в точке O. Докажите, что угол BOC равен внешнему углу треугольника при вершине B.

297 На стороне AD треугольника ADC отмечена точка B так, что $BC = BD$. Докажите, что прямая DC параллельна биссектрисе угла ABC.

298 На рисунке 145 $AD \parallel BE$, $AC = AD$ и $BC = BE$. Докажите, что угол DCE — прямой.

299 На рисунке 146 $AB = AC$, $AP = PQ = QR = RB = BC$. Найдите угол A.

300 Докажите, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведённой из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника, а основания высот, проведённых из вершин острых углов, — на продолжениях сторон.

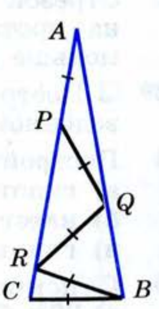


Рис. 146

301 Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что:
а) если $HM_1 = HM_2$, то $AM_1 = AM_2$;
б) если $HM_1 < HM_2$, то $AM_1 < AM_2$.

302 Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что:
а) если $AM_1 = AM_2$, то $HM_1 = HM_2$;
б) если $AM_1 < AM_2$, то $HM_1 < HM_2$.

303* Докажите, что в треугольнике ABC медиана AM меньше полусуммы сторон AB и AC.

304* Докажите, что если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $MB + MC < AB + AC$.

305 Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра треугольника.

306 Докажите, что если $AB = AC + CB$, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

307 В прямоугольном треугольнике проведена высота из вершины прямого угла. Докажите, что данный треугольник и два образовавшихся треугольника имеют соответственно равные углы.

308 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC, равным 37 см, внешний угол при вершине B равен 60°. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.

309 В треугольнике с неравными сторонами AB и AC проведены высота AH и биссектриса AD. Докажите, что угол HAD равен полуразности углов B и C.

310 Докажите, что в равных треугольниках высоты, проведённые к равным сторонам, равны.

311 Что представляет собой множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от двух данных пересекающихся прямых?

312 Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

313* Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

314 Постройте прямоугольный треугольник по:
а) гипотенузе и острому углу;
б) катету и противолежащему углу;
в) гипотенузе и катету.

315 С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 30°; б) 60°; в) 15°; г) 120°; д) 150°; е) 135°; ж) 165°; з) 75°; и) 105°.

316* □ Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к ней, и медиане, проведённой к одной из двух других сторон.

317 □ Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE, параллельный прямой AC, так, чтобы точки D и E лежали на сторонах AB и BC и $DE = AD + CE$.

318 Дан равносторонний треугольник ABC и точка B_1 на стороне AC. На сторонах BC и AB постройте точки A_1 и C_1 так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.

319* Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведённым из вершины этого угла.

320* Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведённым к этой стороне.

321* Дан треугольник ABC с прямым углом A. На стороне AB постройте точку M, находящуюся на расстоянии AM от прямой BC.

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе I

322 Пусть a — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, а b — число, выражающее длину отрезка CD при единице измерения AB. Как связаны между собой числа a и b?

323 Длина отрезка AB при единице измерения E_1F_1 выражается числом m, а при единице измерения E_2F_2 — числом n. Каким числом выражается длина отрезка E_1F_1 при единице измерения E_2F_2?

324 Пусть $\angle hk$ — меньший из двух смежных углов hk и hl. Докажите, что

$$\angle hk = 90° - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk),$$

$$\angle hl = 90° + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk).$$

325 □ Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 147). Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

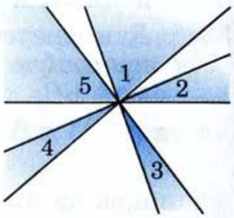


Рис. 147

326 Даны шесть попарно пересекающихся прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух прямых проходит по крайней мере ещё одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

327 Даны шесть точек. Известно, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит по крайней мере ещё одну из данных точек. Докажите, что все эти точки лежат на одной прямой.

Задачи к главе II

328 Точки C_1 и C_2 лежат по разные стороны от прямой AB и расположены так, что $AC_1 = BC_2$ и $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$. Докажите, что прямая C_1C_2 проходит через середину отрезка AB.

329 Докажите, что если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

330 Сторона и два угла одного треугольника равны какой-то стороне и каким-то двум углам другого. Могут ли эти треугольники быть неравными?

331 Две стороны и угол одного треугольника равны каким-то двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

332 Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $OC = OD$, если $AC = AO = BO = BD$.

Задачи к главам III и IV

333 Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если угол A равен α.

334 Через каждую вершину данного треугольника проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе треугольника, исходящей из этой вершины. Отрезки этих прямых вместе со сторонами данного треугольника образуют три треугольника. Докажите, что углы этих треугольников соответственно равны.

335 В каждом из следующих случаев определите вид треугольника:
а) сумма любых двух углов больше $90°$;
б) каждый угол меньше суммы двух других углов.

336 Докажите, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведённая из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противоположной стороны.

337 Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята такая точка M, что $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$. Найдите угол AMC, если $\angle BAC = 80°$.

338 Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

339 Отрезок BB_1 — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BA > B_1A$ и $BC > B_1C$.

340 Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $AD = AB$. Докажите, что $AC > AB$.

341 В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, отрезок AD — биссектриса. Докажите, что $\angle ADB > \angle ADC$ и $BD > CD$.

342 Докажите теорему: если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник равнобедренный.

343 Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведённая из их общей вершины, составляет с меньшей из сторон больший угол.

344 В треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, отрезок AM соединяет вершину A с произвольной точкой M стороны BC. Докажите, что треугольники AMB и AMC не равны друг другу.

345 Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, а из вершины B проведён перпендикуляр BH к этой прямой. Докажите, что

периметр треугольника BCH больше периметра треугольника ABC.

346 В треугольнике ABC, где $AB < AC$, отрезок AD — биссектриса, отрезок AH — высота. Докажите, что точка H лежит на луче DB.

347 Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведённых из этой же вершины.

348 Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведёнными из той же вершины, пополам.

349 Медиана и высота треугольника, проведённые из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Докажите, что треугольник прямоугольный.

350 В треугольнике ABC высота AA_1 не меньше стороны BC, а высота BB_1 не меньше стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный и прямоугольный.

Задачи на построение

Рассмотрим схему, по которой обычно решают задачи на построение циркулем и линейкой. Она состоит из четырёх частей:

1) Отыскание способа решения задачи путём установления связей между искомыми элементами и данными задачи. Эта часть называется **анализом** задачи. Анализ даёт возможность составить план решения задачи на построение.

2) Выполнение **построения** по намеченному плану.

3) **Доказательство** того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

4) **Исследование** задачи, т. е. выяснение вопроса о том, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений. В тех случаях, когда задача достаточно простая, отдельные части, например анализ или исследование, опускаются. Так мы поступали при решении простейших задач на построение. Рассмотрим теперь более сложные задачи.

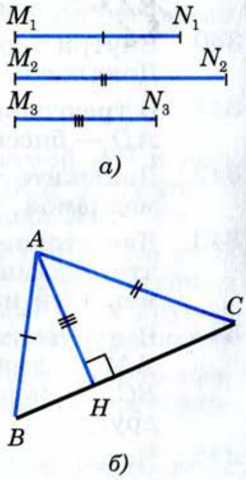


Рис. 148

351 Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне.

Решение

Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 148, *а*). Требуется построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны соответственно данным отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а высота AH равна отрезку M_3N_3. Проведём решение задачи по описанной схеме.

Анализ

Допустим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 148, *б*). Мы видим, что сторона AB и высота AH являются гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника ABH. Поэтому построение треугольника ABC можно провести по такому плану: сначала построить прямоугольный треугольник ABH, а затем достроить его до всего треугольника ABC.

Построение

Строим прямоугольный треугольник ABH, у которого гипотенуза AB равна отрезку M_1N_1, а катет AH равен данному отрезку M_3N_3. Как это сделать, мы знаем (задача **314**, *в*). На рисунке 149, *а* изображён построенный треугольник ABH. Затем проводим окружность радиуса M_2N_2 с центром в точке A. Одну из точек пересечения этой окружности с прямой BH обозначим буквой C. Проведя отрезки BC и AC, получим искомый треугольник ABC (рис. 149, *б*).

Доказательство

Треугольник ABC действительно искомый, так как по построению сторона AB равна M_1N_1, сторона AC равна M_2N_2, а высота AH равна M_3N_3, т. е. треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование

Нетрудно сообразить, что задача имеет решение не при любых данных отрезках M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3. В самом деле, если хотя бы один из отрезков M_1N_1 и M_2N_2 меньше M_3N_3, то задача не имеет решения, так как наклонные AB и AC не могут быть меньше перпендикуляра AH. Задача не имеет

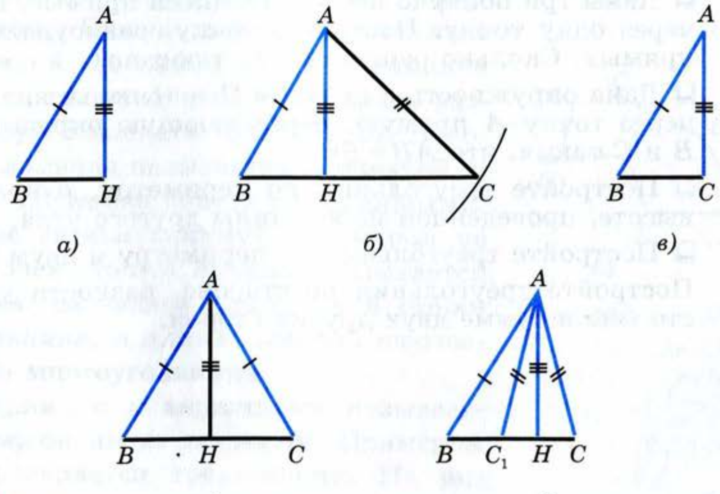


Рис. 149

решения и в том случае, когда $M_1N_1 = M_2N_2 = M_3N_3$ (объясните почему). В остальных случаях задача имеет решение. Если $M_1N_1 > M_3N_3$, а $M_2N_2 = M_3N_3$, то задача имеет единственное решение: в этом случае сторона AC совпадает с высотой AH и искомый треугольник является прямоугольным (рис. 149, *в*). Если $M_1N_1 > M_3N_3$, а $M_2N_2 = M_1N_1$, то задача также имеет единственное решение: в этом случае треугольник ABC равнобедренный (рис. 149, *г*). И наконец, если $M_1N_1 > M_3N_3$, $M_2N_2 > M_3N_3$ и $M_1N_1 \neq M_2N_2$, то задача имеет два решения — треугольники ABC и ABC_1 на рисунке 149, *д*.

352 Даны две точки A и B и прямая a, не проходящая через эти точки. На прямой a постройте точку, равноудалённую от точек A и B. Всегда ли задача имеет решение?

353 ☐ Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудалённую от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

354 ☐ Через три данные точки проведите окружность. Всегда ли задача имеет решение?

355 ☐ Точки A и B лежат по одну сторону от прямой a. Постройте точку M прямой a так, чтобы сумма $AM + MB$ имела наименьшее значение, т. е. была бы меньше суммы $AX + XB$, где X — любая точка прямой a, отличная от M.

356 ☐ Постройте прямоугольный треугольник ABC, если даны острый угол B и биссектриса BD.

357 ☐ На данной окружности постройте точку, равноудалённую от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

358 ☐ Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Постройте точку, равноудалённую от этих прямых. Сколько решений имеет задача?

359 ☐ Дана окружность с центром O и точка A вне её. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что $AB = BC$.

360 ☐ Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведённой из вершины другого угла.

361 ☐ Постройте треугольник по периметру и двум углам.

362 Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон.